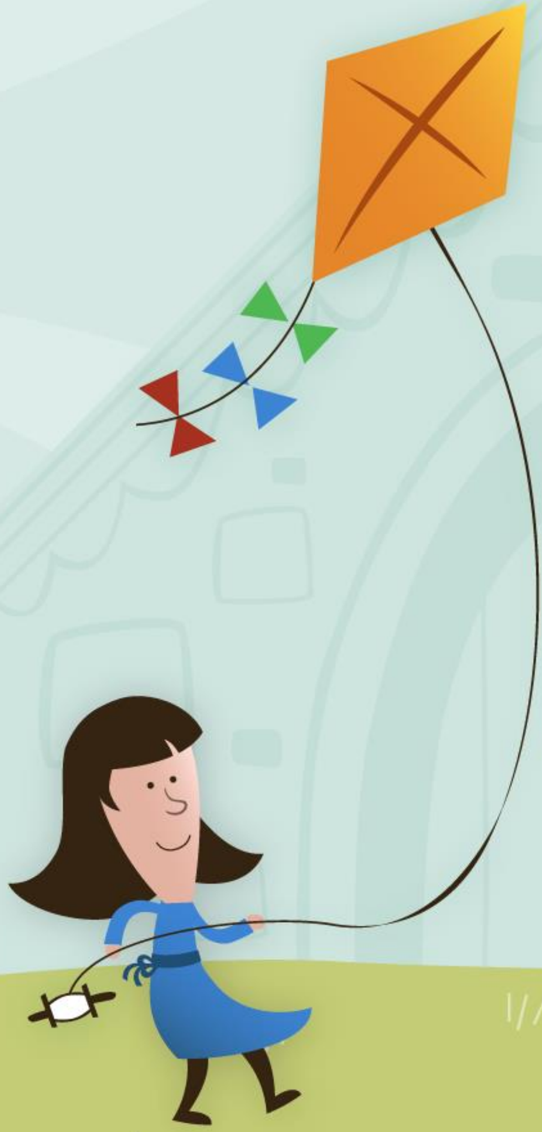
Préparation du DS1 du semestre 2 BUT GEII 1

EDLCC du second ordre, polynômes et fractions



Les EDLCC du 2nd ordre

4’

Quelles sont les solutions de l’équation sans second membre de : $4y'' - 4y' + y = 5t$

1. $y_0(t) = e^{-t/2}(K_1 + K_2)$ — 1%
2. $y_0(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2)$ — 2%
3. $y_0(t) = e^{-t/2}(K_1 + K_2 t)$ — 3%
4. ✓4 $y_0(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t)$ — 4%
5. Aucune des réponses n’est juste. — 5%

Notes

Quelles sont les solutions de l’équation sans second membre de : $4y'' - 4y' + y = 5t$

① On résout $4y'' - 4y' + y = 0$ (E_0)

On résout $4r^2 - 4r + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$

$r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} 4r^2 - 4r + 1 = (2r-1)^2 = 0 \\ \iff r = 1/2 \end{array} \right.$$

Les solutions de (E_0) sont donc : $y_0(t) = (k_1 + k_2 . t) . e^{t/2}$

5’

Les solutions de : $4y'' - 4y' + y = 5t$ sont :

1. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t) + 5t$	1%
✓2 2. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t) + 5t + 20$	2%
3. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t)$	3%
4. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t) + 5t - 20$	4%
5. Aucune des réponses n’est juste.	5%

Notes

Les solutions de : $4y'' - 4y' + y = 5t$ sont :

② On cherche y_p, une solution particulière de (E).

On pose $y_p = at + b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

On remplace dans (E) : $4\times 0 - 4a + at + b = 5t$

$\Leftrightarrow \quad at + b - 4a = 5t + 0$

On identifie : $\begin{cases} a = 5 \\ b - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 5$ et $b = 20$

Donc $y_p = 5t + 20$

③ Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

$y(t) = (k_1 + k_2 t)e^{t/2} + 5t + 20$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

5’

La solution de $4y'' - 4y' + y = 5t$ vérifiant $y(0) = 2 \; et \; y'(0) = 0 \; est$:

✓1 1. $y(t) = e^{t/2}(4t - 18) + 5t + 20$	1%
2. $y(t) = -e^{t/2}(18 + 10t) + 5t + 20$	2%
3. $y(t) = e^{t/2}(2 - 4t) + 5t + 20$	3%
4. $y(t) = e^{t/2}(18 - 2t) + 5t - 20$	4%
5. Aucune des réponses n’est juste.	5%

La solution de $4y'' - 4y' + y = 5t$ vérifiant

$y(0) = 2$ *et* $y'(0) = 0$ *est* :

Les solutions sont : $y(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{t/2} + 5t + 20$

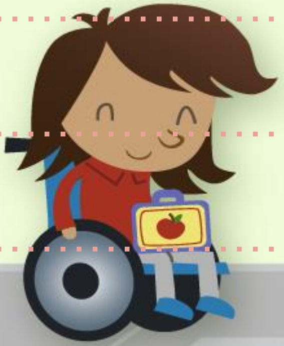
$y(0) = 2 \iff k_1 + 20 = 2 \iff k_1 = -18$

$y'(t) = (k_1 + k_2 t)'\, e^{t/2} + (k_1 + k_2 t)\,(e^{t/2})' + 5$

$y'(t) = k_2 e^{t/2} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2 t)\, e^{t/2} + 5$

$y'(0) = 0 \iff k_2 + \frac{1}{2} k_1 + 5 = 0 \iff k_2 = -\frac{1}{2} k_1 - 5 = 9 - 5 = 4$

La solution est donc : $y(t) = (-18 + 4t)\, e^{t/2} + 5t + 20$



1’

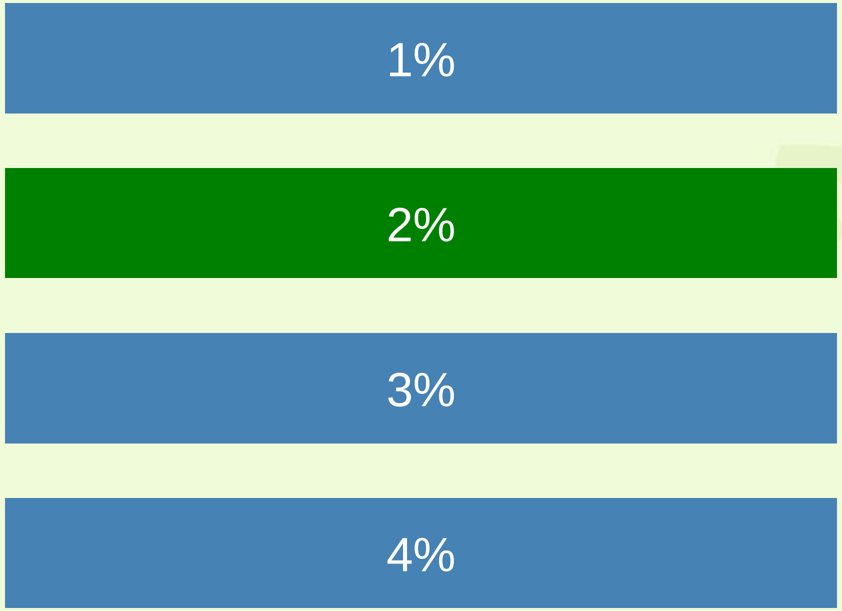
Quelle est la forme d’une solution particulière de l’équation : $y'' - 3y' + y = 3\cos(7t)$?

1. $y_p(t) = A.\cos(t)$

✓2 2. $y_p(t) = A.\cos(7t) + B.sin(7t)$

3. $y_p(t) = A.\cos(7t)$

4. $y_p(t) = A.\cos(t) + B.sin(t)$



2’

Quelle est la dérivée seconde de : $y_p(t) = A.\cos(7t) + B.sin(7t)$?

1. $y''_p(t) = -A.\sin(7t) + B.cos(7t)$ — 1%
2. $y''_p(t) = -49\,.\cos(7t) - 49.sin(7t)$ — 2%
3. $y''_p(t) = 49A.\cos(7t) - 49\mathrm{B}.\sin(7\mathrm{t})$ — 3%
4. $y''_p(t) = -49A\,.\cos(7t) - 49B.sin(7t)$ — 4% ✓4

Quelle est la dérivée seconde de : $y_p(t) = A.\cos(7t) + B.sin(7t)$?

$y'_p(t) = -7A\sin(7t) + 7B.\cos(7t)$

$y''_p(t) = -49A\cos(7t) - 49B\sin(7t)$

Polynômes

Factorisation

Q

2’

Quelle est la factorisation dans l’ensemble des réels du polynôme : $\mathrm{P}(x) = x^4 - 1$?

1. $\mathrm{P}(x) = (x^2 - 1).(x^2 + 1)$
2. $\mathrm{P}(x) = (x - 1)^2.(x + 1)^2$
3. $\mathrm{P}(x) = (x - 1).(x + 1).(x - j).(x + j)$
4. $\mathrm{P}(x) = (x - 1).(x + 1).(x^2 + 1)$ ✓4

1	1%
2	2%
3	3%
4	4%

Quelle est la factorisation dans l’ensemble des réels du polynôme : $\mathrm{P}(x) = x^4 - 1$?

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$A^2 + B^2 = (A-jB)(A+jB)$

$P(x) = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x-j)(x+j)}$ est factorisé dans $\mathbb{C}$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}$ est donc : $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Q

4’

Soit P, le polynôme défini par : $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

1. -1 *et* 2 *sont des racines simples de* P. 1%
2. *1 est racine double et -2 est racine simple de P.* 2%
3. 1 *et* -2 *sont des racines doubles de* P. 3%
4. ✓4 1 *et* -2 *sont des racines simples de* P. 4%

Soit P, le polynôme défini par : $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

$P(1) = 1 + 1 + 2 + 4 - 8 = 8 - 8 = 0$ $\qquad$ $P(-2) = 16 - 8 + 8 - 8 - 8 = 0$

$P'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4$

$P'(1) = 4 + 3 + 4 + 4 \neq 0$ $\qquad$ $P'(-2) = -32 + 12 - 8 + 4 \neq 0$

1 et -2 sont donc des racines simples de P.

Q

2’

Soit P $tel\ que :\ P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

P a pour racines simples 1 et -2, pour le factoriser on :

1. $divise\ P\ par\ 1\ et\ -2$	1%
✓2 2. $divise\ P\ par\ x^2 + x - 2$	2%
3. $divise\ P\ par\ x^2 - x - 2$	3%
4. $divise\ P\ par\ x^2 + x + 2$	4%
5. $divise\ P\ par\ x^2 - x + 2$	5%

Notes

Soit P $tel\ que$: $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

P a pour racines simples 1 et -2, pour le factoriser on :

divise P par $(x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$

Q

Après la division de $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ par $x^2 + x - 2$ on obtient la factorisation de P dans l'ensemble des complexes :

4'

1. $P(x) = (x-1)(x+2)(x-2)(x+2)$ — 1%
2. $P(x) = (x-1)(x+2)(x-j)(x+j)$ — 2%
3. $\mathrm{P(x)} = (\mathrm{x}-1)(x+2)(x^2+4)$ — 3%
4. ✓4 $P(x) = (\mathrm{x}-1)(x+2)(x-2j)(x+2j)$ — 4%

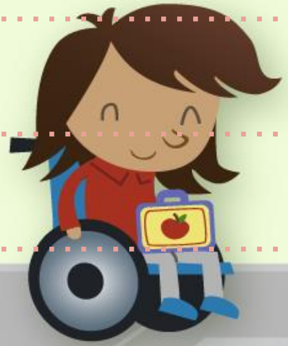
Notes Après la division de $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ par $x^2 + x - 2$ on obtient la factorisation de P dans l'ensemble des complexes :

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 & x^2 + x - 2 \\
\cline{2-2}
-(x^4 + x^3 - 2x^2) & x^2 + 4 \\
\cline{1-1}
4x^2 + 4x - 8 & \\
-(4x^2 + 4x - 8) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc $P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + 4)$ $\quad A^2 + B^2 = (A - jB)(A + jB)$

$P(x) = (x-1)(x+2)\underbrace{(x+2j)(x-2j)}$

est factorisé dans $\mathbb{C}$.



Q

4’

Soit P, le polynôme défini par : $P(x) = x^4 + 5x^2 - 36$.
La factorisation de P dans l’ensemble des réels est :

✓1 1. $P(x) = (x-2)(x+2)(x^2+9)$ — 1%

2. $P(x) = (x-3)(x+3)(x^2+4)$ — 2%

3. $P(x) = (x-3)(x+3)(x+2)(x-2)$ — 3%

4. $P(x) = (x-3j)(x+3j)(x+2)(x-2)$ — 4%

5. $P(x) = (x-3)(x+3)(x+2j)(x-2j)$ — 5%

Notes

Soit P, le polynôme défini par : $P(x) = x^4 + 5x^2 - 36$.
La factorisation de P dans l'ensemble des réels est :

P est un polynôme bicarré : On pose $X = x^2$ et on résout :

$$X^2 + 5X - 36 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(-36) = 169 > 0$$

$$X_1 = \frac{-5+13}{2} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-5-13}{2} = -9$$

Donc $X^2 + 5X - 36 = (X-4)(X+9)$

et $P(x) = (x^2-4)(x^2+9)$

$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3i)(x+3i)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$.

La factorisation de P dans $\mathbb{R}$ est donc :

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x^2+9).$$

Q

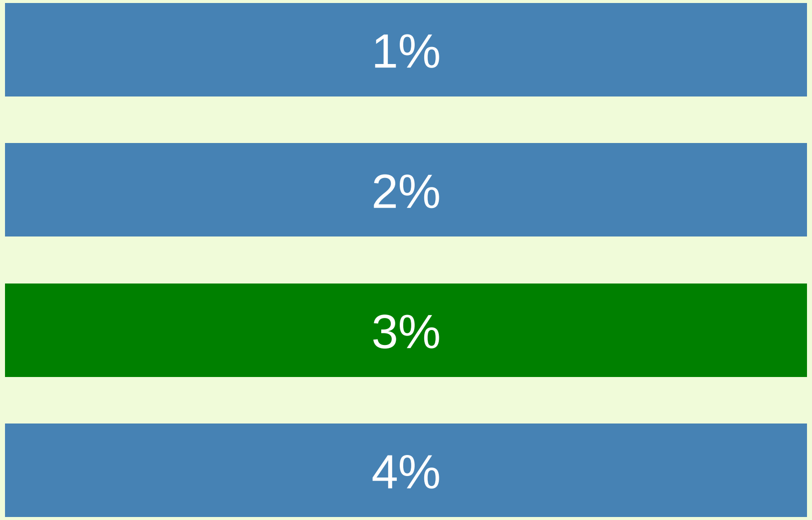
2’

Soit P, le polynôme défini par :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6.$$

1 est une racine de P, de multiplicité :

1. un
2. deux
3. ✓3 trois
4. quatre



Notes

Soit P, le polynôme défini par :

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6.$$

1 est une racine de P, de multiplicité :

$$P(1) = 1 - 2 - 6 + 20 - 19 + 6 = 27 - 27 = 0$$

$$P'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 40x - 19$$

$$P'(1) = 5 - 8 - 18 + 40 - 19 = 45 - 45 = 0$$

$$P''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 36x + 40$$

$$P''(1) = 20 - 24 - 36 + 40 = 60 - 60 = 0$$

$$P^{(3)}(x) = 60x^2 - 48x - 36$$

$$P^{(3)}(1) = 60 - 48 - 36 \neq 0$$

1 est donc une racine triple de P.

Q

5’

1 est une racine triple de P, quelles sont les autres racines de P ?

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6.$$

1. -3 et 2 — 1%
2. -2 et 3 — 2%
3. 4 et 2 — 3%
4. 1 et -2 — 4%

Notes

1 est une racine triple de P, quelles sont les autres racines de P ?

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6.$$

On divise P par $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Pascal:

1 2 1

1 3 3 1 → $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
\hline
-(x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2) & x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \\
\quad x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 19x + 6 & \\
-(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) & \\
\quad -6x^3 + 18x^2 - 18x + 6 & \\
-(-6x^3 + 18x^2 - 18x + 6) & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

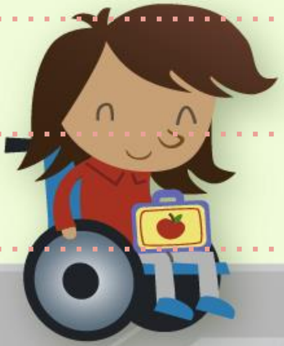
$x^2 - Sx + P$

$-1 = x_1 + x_2$; $-3 + 2$

$x_1 \times x_2 = -6$; $-3 \times (2)$

ou Δ ⇒ 3 et +2 sont les autres racines

CC $p(x) = (x-1)^3 (x-3)(x+2)$



Fractions

DSES et recherche de primitives

Peut-on simplifier la fraction F, définie par :

3’

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{(2x-1)^2.(x-2)} \quad \forall x \neq 2\,;1/2\ ?$$

1. Non, cette fraction est irréductible
2. Oui, on peut la réduire en : $f(x) = \frac{2x+1}{(2x-1).(x-2)}$ ✓2
3. Oui, on peut la réduire en : $f(x) = \frac{1}{x-2}$
4. Les réponses ci-dessus sont fausses

1	1%
2	2%
3	3%
4	4%

Peut-on simplifier la fraction f, définie par :

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{(2x-1)^2.(x-2)} \quad \forall x \neq 2\,;1/2\ ?$$

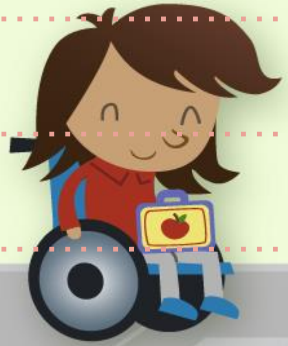
$$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x-1)(2x+1)$$

Donc :

$$f(x) = \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)^2(x-2)} = \frac{2x+1}{(2x-1)(x-2)} \quad \forall x \neq 2\,; 1/2.$$

est réductible par $2x-1$

est irréductible.



3'

Quelle est la DSES de $f(x) = \dfrac{2x+1}{(2x-1).(x-2)}$?

1. $f(x) = \dfrac{5/3}{x-2} - \dfrac{4/3}{2x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{5/3}{x-2} - \dfrac{1/3}{2x-1}$
3. *Ni la réponse* 1 *ni la* 2 *n'est juste.*

1%

2%

3%

Quelle est la DSES de $f(x) = \dfrac{2x+1}{(2x-1).(x-2)}$?

$$f(x) = \frac{2x+1}{(2x-1)(x-2)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x-2}$$

$$a = \left[(2x-1)f(x)\right]_{x=1/2} = \left[\frac{2x+1}{x-2}\right]_{x=1/2} = \frac{1+1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

$$b = \left[(x-2)f(x)\right]_{x=2} = \left[\frac{2x+1}{2x-1}\right]_{x=2} = \frac{5}{3}$$

Donc $f(x) = \dfrac{-4/3}{2x-1} + \dfrac{5/3}{x-2}$

3’

Quelles sont alors les primitives de :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(2x-1).(x-2)} = \frac{5/3}{x-2} - \frac{4/3}{2x-1} \ ?$$

1. $\int f(x)dx = \frac{5}{3}\ln(x-2) - \frac{2}{3}\ln(2x-1) + cte$ — 1%
2. $\int f(x)dx = \frac{5}{3}\ln(x-2) - \frac{4}{3}\ln(2x-1) + cte$ — 2%
3. ✓3 $\int f(x)dx = \frac{5}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x-1/2| + cte$ — 3%
4. $Aucune\ des\ réponse\ ci-dessus\ n'est\ juste$ — 4%

Quelles sont alors les primitives de :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(2x-1).(x-2)} = \frac{5/3}{x-2} - \frac{4/3}{2x-1} \quad ?$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{5}{3} \cdot \int \frac{dx}{x-2} - \frac{4}{2\times 3} \int \frac{2dx}{2x-1}$$

$U = x-2$ $\qquad$ $U = 2x-1$

$U' = 1$ $\qquad$ $U' = 2$

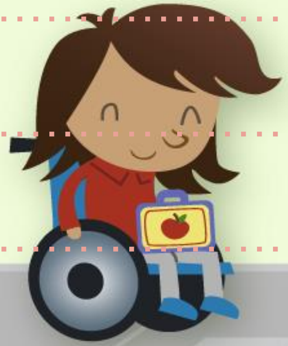
Méth1 $\quad \int \frac{U'}{U}\,dx = \ln|U| + cte$

$$\int f(x)\,dx = \frac{5}{3} \cdot \ln|x-2| - \frac{2}{3} \ln|2x-1| + cte$$

$$\ln|2x-1| = \ln|2(x-1/2)| = \underbrace{\ln 2}_{cte} + \ln|x-1/2|$$

Méth2 $\quad \int f(x)\,dx = \frac{5}{3} \cdot \int \frac{dx}{x-2} - \frac{4}{3} \int \frac{dx}{2(x-1/2)}$

$$\int f(x)\,dx = \frac{5}{3} \cdot \ln|x-2| - \frac{2}{3} \cdot \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + cte$$



3’

Les primitives de $g(x) = \frac{3x-5}{x^2+1}$ sont :

1. $G(x) = 3\ln(x^2+1) - 5\arctan(x) + cte$ — 1%

2. $G(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \frac{5}{2}\arctan(x^2+1) + cte$ — 2%

3. $G(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \frac{5}{2}\arctan(x^2) + cte$ — 3%

✓4 4. *Aucune des solutions précédentes n'est juste.* — 4%

Les primitives de $g(x) = \frac{3x-5}{x^2+1}$ sont :

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + cte$$

$$u = x^2+1 \Rightarrow u' = 2x.$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan u + cte$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + cte.$$

$$\int g(x)\,dx = \frac{3}{2}.\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 5.\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$G(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 5\arctan x + cte.$$

3’

On cherche c et d deux nombres réels tels que :

$$cj + d = \frac{2+3j}{1-2j}$$

Quel est le résultat juste ?

1. $\text{Aucune des réponses ci} - \text{dessous n}'\text{est juste.}$ — 1%
2. $c = -3/2 \; et \; d = 2$ — 2%
3. ✓3 $c = 7/5 \; et \; d = -4/5$ — 3%
4. $\mathrm{d} = -3/2 \; et \; c = 2$ — 4%
5. $\mathrm{d} = 1 \; et \; c = -4/5$ — 5%

On cherche c et d deux nombres réels tels que :

$$cj + d = \underbrace{\frac{2+3j}{1-2j} \times \frac{1+2j}{1+2j}}_{(A-jB)(A+jB) = A^2+B^2} = \frac{2+4j+3j-6}{1^2+2^2}$$

Quel est le résultat juste ?

$$\iff cj+d = \frac{-4+7j}{5} \iff cj+d = -\frac{4}{5} + j\frac{7}{5} \iff \begin{cases} c = 7/5. \\ d = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$