Corrigé annales de DS1
Semestre 2

Exercice 1 **EDLCC du second ordre (6 pts)**

Résoudre, en rédigeant le mieux possible, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = \cos(3t).e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

→ On résout $y'' - 6y' + 9y = 0$

On résout $r^2 - 6r + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 36 = 0$ donc $r_1 = r_2 = \frac{6}{2} = 3$

Les solutions de (E_0) sont donc :

$y_0(x) = (K_1 t + K_2) \cdot e^{3t}$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

→ On cherche y_p, une solution particulière de (E) : On pose $y_p = z \cdot e^t$

$y_p' = (z' + z)e^t$

$y_p'' = (z'' + 2z' + z)e^t$

On remplace dans (E) :

$[z'' + 2z' + z - 6(z' + z) + 9z]e^t = \cos(3t).e^t$

$\iff z'' - 4z' + 4z = \cos(3t)$

On pose $4 \times\; z = A\cos(3t) + B\sin(3t)$

$-4 \times\; z' = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)$

$z'' = -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t)$

$(-9A - 12B + 4A)\cos(3t) + (-9B + 12A + 4B)\sin(3t)$

$= \cos(3t)$

$\iff \begin{cases} -5A - 12B = 1 \\ 12A - 5B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5A - \frac{144}{5}A = 1 \\ B = \frac{12}{5}A \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -\frac{169}{5}A = 1 \iff A = -\frac{5}{169} \\ B = -\frac{12}{169} \end{cases}$

Donc $y_p = \left(-\frac{5}{169}\cos(3t) - \frac{12}{169}\sin(3t)\right)e^{t}$

Les solutions de (E) sont donc $y = y_0 + y_p$

$y(t) = (k_1 t + k_2)e^{3t} - \frac{1}{169}\left(5\cos(3t) + 12\sin(3t)\right)e^{t}$

<u>CI</u> : $y(0) = 1 \Leftrightarrow k_2 - \frac{5}{169} = 1 \Leftrightarrow k_2 = \frac{174}{169}$

$y'(t) = \left(k_1 + 3(k_1 t + k_2)\right)e^{3t} - \frac{1}{169}\left(-15\sin(3t) + 26\cos(3t) + 5\cos(3t) + 12\sin(3t)\right)e^{t}$

$y'(0) = k_1 + 3k_2 - \frac{1}{169}(26+5) = 0 \Leftrightarrow k_1 + 3k_2 = \frac{41}{169} \Leftrightarrow k_1 = \frac{41}{169} - \frac{522}{169} = \frac{-481}{169}$

La solution est donc : $y(t) = \frac{1}{169}\left[(174 - 481t)e^{3t} - \left(5\cos(3t) + 12\sin(3t)\right)e^{t}\right]$

Exercice 2 **Fraction (5 pts)**

En suivant les étapes indiquées, décomposer en somme d'éléments simples dans l'ensemble des réels, puis intégrer la fraction : $f(x) = \frac{4x^2-1}{4x^4+4x^3-3x^2-4x-1} = \frac{A(x)}{B(x)}$

a) Factoriser dans l'ensemble des réels B, le dénominateur de f. (on montrera que 1 et -1 sont des racines évidentes, on effectuera une division, puis un calcul de delta etc …).

a) $B(x) = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1.$

$B(1) = 4+4-3-4-1 = 0$ $\quad B(-1) = 4-4-3+4-1 = 0$

B est donc divisible par $(x-1)(x+1) = x^2-1$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4+4x^3-3x^2-4x-1 & x^2-1 \\ \hline -(4x^4-4x^2) & 4x^2+4x+1 \\ \hline 4x^3+x^2-4x-1 & = (2x)^2+2\times(2x)+1^2 \\ -(4x^3-4x) & = (2x+1)^2 \\ \hline x^2-1 & \\ -(x^2-1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $B(x) = (x-1)(x+1)(4x^2+4x+1)$

ou

On résout $4x^2+4x+1=0$

$\Delta = 16-16=0 \quad x_1 = x_2 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

Donc $B(x) = (x-1)(x+1)\,4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$B(x) = (x-1)(x+1)\,2^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$B(x) = (x-1)(x+1)(2x+1)^2$

b) Réduire (simplifier) la fraction f.

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{(x-1)(x+1)(2x+1)^2} = \frac{(2x-1)\cancel{(2x+1)}}{(x-1)(x+1)\cancel{(2x+1)}^2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)(2x+1)}$$

c) Déterminer la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de la fraction f obtenue en c), puis calculer les coefficients.

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$$

$$a = \left[(x-1)\,f(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{2x-1}{(x+1)(2x+1)}\right]_{x=1} = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$$

$$b = \left[(x+1)\,f(x)\right]_{x=-1} = \left[\frac{2x-1}{(x-1)(2x+1)}\right]_{x=-1} = \frac{-3}{-2\times(-1)} = -\frac{3}{2}$$

$$c = \left[(2x+1)\,f(x)\right]_{x=-1/2} = \left[\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=-1/2} = \frac{-1-1}{-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{2\times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{8}{3}\,\frac{1}{2x+1}$

d) En déduire les primitives de la fractions f.

donc $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\underbrace{2x+1}_{u=2x+1 \Rightarrow u'=2}}\right)$ $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + cte$

$$= \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{8}{2\times 3}\int\frac{dx \times 2}{2x+1}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|2x+1| + cte.$$

Exercice 3 **Fraction (5 points)**

Soit g, la fraction définie par : $g(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2(x^2+4)}$. On admet que la forme de sa décomposition en somme d'éléments simples est : $g(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2(x^2+4)} = \frac{a_2}{(x-2)^2} + \frac{a_1}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+4}$

Calculer les constantes : $a_2, b, c, puis\ a_1$ (On pourra utiliser l'astuce $\lim_{x\to+\infty} x.g(x)$)

$$a_2 = \left[(x-2)^2 g(x)\right]_{x=2} = \left[\frac{x-1}{x^2+4}\right]_{x=2} = \frac{1}{8}$$

$$b\,2j + c = \left[(x^2+4)g(x)\right]_{x=2j} = \left[\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]_{x=2j} = \frac{2j-1}{(2j-2)^2} = \frac{2j-1}{-4-8j+4} = \frac{2j-1}{-8j} \times \frac{j}{j}$$

$$\Leftrightarrow 2bj + c = \frac{-2-j}{8} \Leftrightarrow c + 2bj = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}j \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 = a_1 + b \Leftrightarrow a_1 = -b = \frac{1}{16}$$

$\underline{\underline{\text{OU}}}$ $$g(0) = \frac{-1}{16} = \frac{a_2}{4} - \frac{a_1}{2} - \frac{1}{16} \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_2}{2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{16}$$

$$\text{Donc } g(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{16}\frac{x+4}{x^2+4}$$

b) En déduire l'expression de g, puis ses primitives.

$$g(x) = \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{16}\,\frac{x+4}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2\times 16}\,\frac{2x}{x^2+4} - \frac{4}{16}\,\frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+\frac{4}{4}\right)}$$

$\int \frac{u'}{u^2}\,dx = -\frac{1}{u} + cte$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + cte$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{u^2+1}\,dx = \mathrm{Arctan}\,u + cte$

$$g(x) = \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{32}\,\frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{16}\times 2\,\frac{1\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$$

$$\int g(x)\,dx = -\frac{1}{8}\,\frac{1}{x-2} + \frac{1}{16}\ln|x-2| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + cte$$