

Fonctions puissances entières et rationnelles

1 Les fonctions puissances à exposant entier naturel

Les fonctions puissances sont celles de la forme

$$p_n : x \mapsto x^n. \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

Elles sont définies, continues et dérivables sur \mathbb{R} . Leurs fonctions dérivées sont données par

$$\forall x \in \mathbb{R}; p'_n(x) = nx^{n-1}.$$

Comparaisons entre fonctions puissances

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit m et n deux nombres entiers naturels tels que $m > n$. On désire comparer les valeurs en x des fonctions puissances p_m et p_n . Le tableau suivant récapitule les résultats de cette étude.

		$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 0$
$0 \leq x \leq 1$	$x \geq 1$	$x^m \geq x^n$	$x^m \leq x^n$
$x^m \leq x^n$	$x^m \geq x^n$	$x^m \leq x^n$	$x^m \geq x^n$
		$x^m \leq x^n$	$x^m \leq x^n$

Parité

Si n est pair, alors la fonction puissance p_n est paire ; si n est impair, alors cette fonction p_n est impaire.

1.1 Variations et limites

Pour étudier plus précisément les variations de la fonction puissance p_n , on distingue encore le cas où l'exposant n est pair de celui où il est impair.

Cas d'un exposant pair non nul

Soit n un entier naturel **pair non nul**.

La fonction p_n est alors strictement décroissante sur \mathbb{R}^- et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

Les limites de la fonction p_n aux deux infinis sont

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty.$$

Cas d'un exposant impair

Soit n un nombre naturel **impair**.

La fonction p_n est alors strictement croissante sur \mathbb{R} .

Les limites de la fonction p_n sont

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty.$$

Remarque

Pour ce qui est de l'exposant nul, la fonction p_0 prend évidemment la valeur 1 en tout x réel.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant.

	Limites	Variations
$n = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = 1$	La fonction p_0 est constante sur \mathbb{R} , avec $p_0(x) = 1$.
$n \neq 0$ pair	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	La fonction p_n est strictement décroissante sur \mathbb{R}^- et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .
n impair	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$.	La fonction p_n est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Les courbes représentatives :

On peut représenter les fonctions puissances sur un même graphique

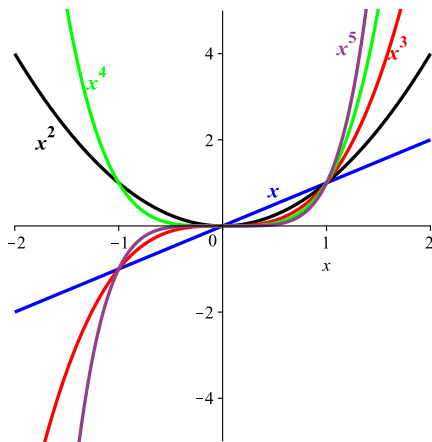


FIGURE 1: Comparaison sur l'intervalle $[-2; 2]$

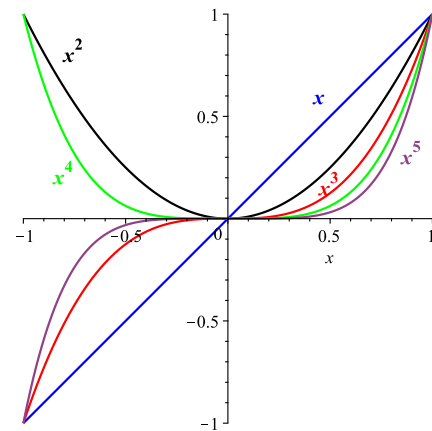


FIGURE 2: Comparaison sur l'intervalle $[-1; 1]$

2 Les fonctions puissances à exposant entier strictement négatif

Les fonctions puissances à exposant entier strictement négatif sont celles de la forme

$$p_n : x \mapsto x^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}.$$

Elles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Leurs dérivées sont données par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; p_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Il faut rappeler que pour $x \neq 0$, $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ avec $-n \in \mathbb{N}^*$. De ce fait, l'étude des fonctions p_n d'exposant entier négatif non nul se ramène à celle des fonctions p_{-n} , où $-n$ est un entier naturel non nul. On est donc conduit à distinguer les deux cas n pair et n impair.

2.1 Variations et limites

Cas des exposants pairs

Soit n un entier relatif strictement négatif et **pair**.

La fonction p_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_-^* et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

Les limites de la fonction p_n sont

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = +\infty$$

Cas des exposants impairs

Soit n un entier relatif strictement négatif et **impair**.

La fonction p_n est strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

Les limites de la fonction p_n sont

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = +\infty$$

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant.

	Limites	variations
n pair	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = +\infty$	La fonction p_n est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et strictement croissante sur \mathbb{R}_-^* .
n impair	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = +\infty$	La fonction p_n est strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .

Les courbes représentatives :

On peut représenter les fonctions puissances sur un même graphique.

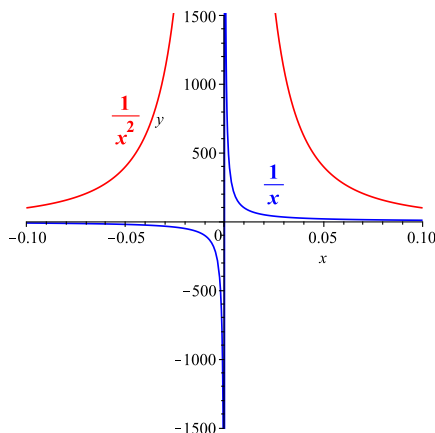


FIGURE 3: Comparaison sur l'intervalle $[-0,1; 0,1]$

3 Les fonctions racines n -ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions racines n -ièmes sont celles de la forme

$$r_n : x \mapsto \sqrt[n]{x},$$

où $\sqrt[n]{x}$ est la solution de même signe que x , quand elle existe, de l'équation (E) d'inconnue $y : y^n = x$.

— Si n est pair,

cette équation n'a de solution que si x est positif et alors $\sqrt[n]{x}$ est aussi positif. La fonction $r_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur \mathbb{R}^+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; r'_n(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

De l'équation (E) on déduit que

$$\forall x \geq 0 ; (\sqrt[n]{x})^n = p_n \circ r_n(x) = x.$$

La fonction r_n est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

La limite de la fonction r_n en $+\infty$ est $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

— Si n est impair,

l'équation (E) a une unique solution pour tout nombre réel x , donc la fonction $r_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; r'_n(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

De l'équation (E) on déduit que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} ; (\sqrt[n]{x})^n = p_n \circ r_n(x) = x.$$

La fonction r_n est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Les limites de la fonction r_n en $+\infty$ et en $-\infty$ sont

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

Les représentations graphiques :

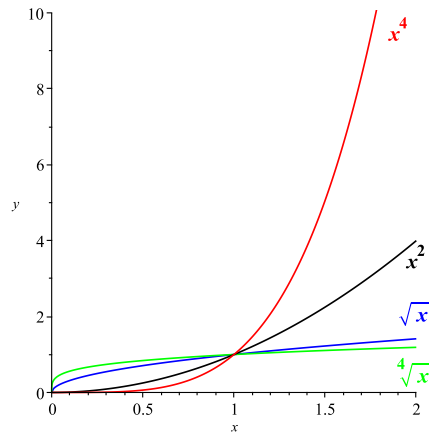


FIGURE 4: les fonctions puissances et les racines n -ièmes pour $n = 2$ et $n = 4$ sur $[0; 2]$

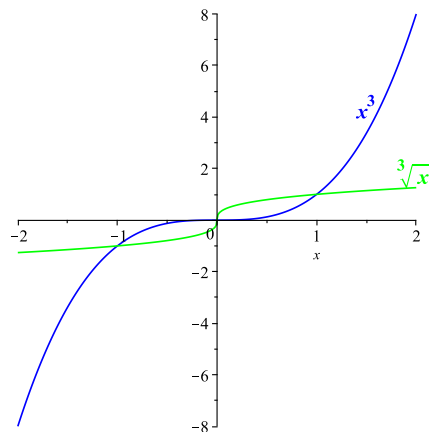


FIGURE 5: la fonction cube et racine cubique sur $[-2; 2]$

4 Les fonctions puissances à exposant rationnel

Soit $k = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, avec a et b deux entiers relatifs non nuls. La puissance d'exposant k d'un nombre réel x n'existe pas pour $x < 0$, et n'existe pour $x = 0$ que lorsque $k > 0$.

C'est pourquoi la fonction

$$pr_k : x \mapsto x^k = x^{\frac{a}{b}}$$

n'est définie que sur \mathbb{R}^+ pour $k > 0$, et sur \mathbb{R}_+^* pour $k < 0$.

Cas de l'inverse d'un entier naturel pair

Si le nombre $k = \frac{1}{n}$ avec n entier naturel pair non nul, la fonction pr_k est exactement la fonction racine n -ième.

Cas de l'inverse d'un entier naturel impair

Si le nombre $k = \frac{1}{n}$ avec n entier naturel impair, la fonction pr_k prend en tout point de \mathbb{R}^+ la même valeur que la fonction racine n -ième. Cependant, lorsque n est impair, la fonction pr_k n'est définie

que sur \mathbb{R}^+ , alors que la fonction racine n -ième r_n est définie sur \mathbb{R} tout entier : on dit alors que la fonction puissance pr_k est la restriction à \mathbb{R}^+ de la fonction r_n .

Cas général

Dans tous les cas, lorsque $k = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, avec $b > 0$ un entier naturel, on a $pr_k = pr_{\frac{1}{b}} \circ p_a = p_a \circ pr_{\frac{1}{b}}$, et la fonction $pr_{\frac{1}{b}}$ est égale, soit à la fonction r_b si b est pair, soit à la restriction de r_b à \mathbb{R}_+ si b est impair.

Continuité et dérivabilité

Pour tout $k \in \mathbb{Q}^*$, la fonction pr_k est continue là où elle est définie, et dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec la formule de dérivation

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* ; pr'_k(x) = kx^{k-1}.$$