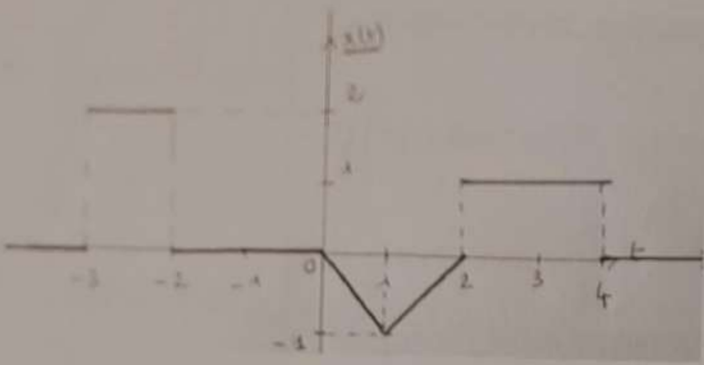
IUT de Toulon
GEII2App

DS N°2 de R404 : Outils Mathématiques et Logiciels

Durée : 1h30 Calculatrice : collège Documents : Tableau TF

Exercice1 : (4 points) Soit x(t) le signal représenté par le graphe suivant :



1) Exprimer x(t) à l'aide de signaux triangle et porte
2) En déduire la transformée de Fourier de x(t).

Exercice 2 Soit x, la fonction définie par : $x(t) = \begin{cases} -t-2 & \text{si } -2 \leq t \leq -1 \\ t & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **(8 points)**

On souhaite calculer la transformée de ce signal par 2 méthodes différentes :

1) Représenter graphiquement x(t)
2) Méthode 1 : Représenter graphiquement la dérivée x'(t), Calculer alors la transformée de Fourier de x'(t) sans calcul intégral, puis en déduire la transformée de Fourier de x(t).
3) Méthode 2 : Exprimer x(t) à l'aide de fonctions triangle, puis calculer sa transformée de Fourier.

Exercice 3 Fonction de transfert (5 points)

Un circuit est caractérisé par l'équation différentielle suivante : $4.\frac{ds}{dt} + 6.s(t) = 10.e(t)$ où e(t) et s(t) sont les signaux respectivement d'entrée et de sortie.

1) Appliquer la transformation de Fourier à cette équation et en déduire la fonction de transfert du circuit : $H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$ où E et S sont les transformées de Fourier respectives de e et s.
2) Calculer h.
3) Déterminer la réponse impulsionnelle
4) Calculer s lorsque e est un signal rectangle : e(t) = rect(t) .

Exercice 4 : (3 points) Produit de convolution $\mathbf{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du}$

Calculer le produit de convolution des fonctions f et g définies par :
f(t) = rect(t/2) et g(t) = cos(3t).U(t) où rect est le signal rectangle et U l'échelon-unité.

DS n° 2

exo 1 4/4

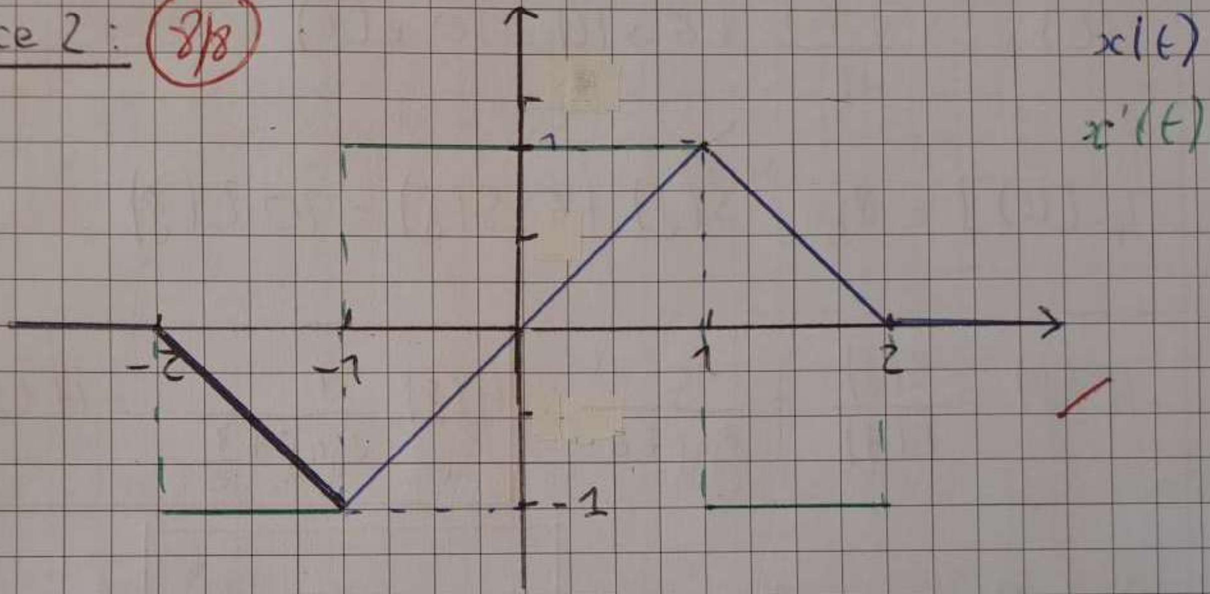
1) $$x(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(t + \frac{5}{2}\right) - \mathrm{tri}(t-1) + \mathrm{rect}\left(\frac{1}{2}(t-3)\right)$$

$$= 2\,\mathrm{rect}\left(t + \frac{5}{2}\right) - \mathrm{tri}(t-1) + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

2) $$TF(x(t)) = 2e^{5j\pi f}\,\mathrm{sinc}(f) - e^{-2j\pi f}\,\mathrm{sinc}^2(f) + 2e^{6j\pi f}\,\mathrm{sinc}(2f)$$

Exercice 2 : 8/8

1)



2)

$x'(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t + \frac{3}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right)$ donc :

$X'(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f) - e^{3j\pi f}\,\mathrm{sinc}(f) - e^{-3j\pi f}\,\mathrm{sinc}(f)$

$= 2\,\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}(f)\left(e^{3j\pi f} + e^{-3j\pi f}\right)$

$\boxed{X'(f) = 2\left(\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}(f)\cos(3\pi f)\right)}$

Or $X(f) = \dfrac{X'(f)}{2j\pi f} \Leftrightarrow X(f) = \dfrac{1}{j\pi f}\left(\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}(f)\cos(3\pi f)\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(f) = -\frac{j}{\pi f}\left(\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}(f)\cos(3\pi f)\right)}$$

3) $x(t) = \mathrm{tri}(t-1) - \mathrm{tri}(t+1)$

Donc : $X(f) = e^{-2j\pi f}\,\mathrm{sinc}^2(f) - e^{2j\pi f}\,\mathrm{sinc}^2(f)$

$$= \mathrm{sinc}^2(f)\left(e^{-2j\pi f} - e^{2j\pi f}\right)$$

$$\boxed{X(f) = -2j\,\mathrm{sinc}^2(f)\sin(2\pi f)}$$

exo 3 (5/5)

① $$4\dot{s}(t) + 6s(t) = 10e(t)$$

TF

$$4 \times 2j\pi f\, S(f) + 6S(f) = 10E(f)$$

$$S(f)(8j\pi f + 6) = 10E(f)$$

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{10}{8j\pi f + 6} = \frac{5}{4j\pi f + 3}$$

②

$$H(f) = \frac{5}{3 + 4j\pi f} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\,\frac{1}{\frac{3}{2} + 2j\pi f}$$

$$TF^{-1}(H(f)) = \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}t}\, U(t) = h(t)$$

③ si $e(t) = \delta(t) \xRightarrow{TF} E(f) = 1$

donc $S(f) = H(f)$ et $s(t) = h(t)$

$$s(t) = \frac{5}{2} e^{-3/2\, t}\, U(t)$$

④ si $e(t) = rect(t)$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) * e(t)\, dt$$

$$S(t) = \frac{5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} rect(u) \times e^{-3/2(t-u)}\, U(t-u)\, du$$

$$S(t) = \frac{5}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-3/2(t-u)}\, U(t-u)\, du$$

changement de variable

$v = t-u \qquad du = -dv$

lorsque $u = \frac{1}{2} \Rightarrow v = t - \frac{1}{2}$

lorsque $u = -\frac{1}{2} \Rightarrow v = t + \frac{1}{2}$

$$S(t) = \frac{5}{2}\int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{-3/2 v}\, U(v)\, dv$$

attention 3 cas possible

1er : si $t + 1/2$ et $t - 1/2 < 0$

alors $s(t) = 0$

2e : si $t - 1/2 < 0 < t + 1/2$

$$s(t) = \frac{5}{2}\int_{0}^{t+1/2} e^{-3/2 v}\, dv = \frac{5}{2} \times -\frac{2}{3}\left[e^{-3/2 v} + ct\right]_{0}^{t+1/2}$$

$$s(t) = \frac{5}{3}\left(1 - e^{-3/2(t+1/2)}\right)$$ TB

3e : si $t - 1/2$ et $t + 1/2 > 0$

$$s(t) = \frac{5}{2} \times -\frac{2}{3}\left[e^{-3/2 v} + ct\right]_{t-1/2}^{t+1/2}$$

$$= \frac{5}{3}\left(e^{-3/2(t-1/2)} - e^{-3/2(t+1/2)}\right)$$

$$s(t) = \frac{5}{3} e^{-3/2 t}\left(e^{3/4} - e^{-3/4}\right) = \frac{10}{3} e^{-3/2 t}\, sh(3/4)$$

TB

Exercice 4. 3/3

$$f(t) * g(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right) \cos(3t) \times U(t)$$

$$-\frac{1}{2} \leq rect(t) \leq \frac{1}{2}$$

$$-1 \leq rect\left(\frac{t}{2}\right) \leq 1$$ TB

soit $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos(3(t-\theta)) \times U(t-\theta)\, d\theta$

$$= \int_{-1}^{1} \cos(3(t-\theta)) \times U(t-\theta)\, d\theta.$$

on pose $v = t - \theta$ ainsi $dv = -d\theta$

$\begin{cases} 1 \rightarrow t-1 \\ -1 \rightarrow t+1 \end{cases}$ $f(t) * g(t) = \int_{t+1}^{t-1} \cos 3v \times Uv - dv$

$f(t) * g(t) = \int_{t-1}^{t+1} \cos(3v) \times U(v)\, dv$ 3 cas avec l'échelon unité.

1er cas si $t \leq -1$

$f(t) * g(t) = 0$

2ème cas si $-1 \leq t \leq 1$

$$f(t) * g(t) = \left[\frac{\sin 3v}{3}\right]_{0}^{t+1} = \frac{1}{3} \sin(3(t+1))$$

3ème cas si $t > 1$

$$f(t) * g(t) = \left[\frac{\sin(3v)}{3}\right]_{t-1}^{t+1} = \frac{1}{3}\left(\sin(3(t+1)) - \sin(3(t-1))\right)$$

TB