Sujet 1

Test de R2.04 **Nom :..............................** **Prénom : .... Groupe : ...**

Exercice 1 Déterminer la valeur exacte de chaque intégrale suivante, en précisant, lorsque cela est demandé, dans chaque encadré la formule entière de primitive utilisée et les expressions de U et U' **(2.5 pts)**

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 3x.\cos(x^2)dx$$

Formule : $\int U'.\cos U.dx = \sin U + ct$

U = x^2 ⇒ U'= $2x$

$I = \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x.\cos(x^2)\,dx$

$= \frac{3}{2}\left[\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi/2}}$

$= \frac{3}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right)$

$I = \frac{3}{2}$

$$J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)dt$$

tan est impaire sur $[-\pi/3 ; \pi/3]$, donc $J = 0$

Exercice 2 Déterminer la formule d'intégration par parties dans le rectangle ci-dessous, puis calculer l'intégrale K : **(3.5 pts)**

Formule : $\int_a^b U . V' \, dt = [U . V]_a^b - \int_a^b U' . V \, dt$

$K = \int_{-6}^{+5} \ln(x^2 + 4x) . (2x + 4) dx =$

$U = \ln(x^2 + 4x)$ $\quad U' = \dfrac{2x+4}{x^2+4x}$

$V' = 2x + 4$ $\quad V = x^2 + 4x$

$K = \left[\ln(x^2+4x) \times (x^2+4x) \right]_{-6}^{+5} - \int_{-6}^{+5} (2x+4) \, dx$

$= 45 \ln 45 - 12 \ln 12 - \left[x^2 + 4x \right]_{-6}^{+5}$

$= 45 \ln 45 - 12 \ln 12 - (45 - 12)$

$K = 45 \ln 45 - 12 \ln 2 - 33$

Sujet 2

Test de R2.04 Nom :............................ Prénom : .... Groupe : ...

Exercice 1 Déterminer la valeur exacte de chaque intégrale suivante, en précisant, lorsque cela est demandé, dans chaque encadré la formule entière de primitive utilisée et les expressions de U et U' **(2.5 pts)**

$$I = \int_0^4 \frac{5x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx$$

Formule : $\int \frac{U'}{2\sqrt{U}}\,dx = \sqrt{U} + cte$

$U = 3x^2+1 \Rightarrow U' = 6x$

$$I = \frac{2 \times 5}{6} \int_0^4 \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$$

$$I = 5 \times \frac{2}{6} \left[\sqrt{3x^2+1}\right]_0^4$$

$$= \frac{5}{3}\left(\sqrt{49} - \sqrt{1}\right)$$

$$I = \frac{5}{3}(7-1) = \frac{5 \times 6}{3} = 10$$

$$J = \int_{-5}^{5} \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$t \longmapsto \frac{t}{1+t^2}$ est impaire donc $J = 0$.

car quotient de $t \longmapsto t$ impaire

et $t \longmapsto t^2+1$ paire.

ou $J = \frac{1}{2}\int_{-5}^{5} \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_{-5}^{5} = \frac{1}{2}\left(\ln(26) - \ln(26)\right) = 0.$

Exercice 2 Déterminer la formule d'intégration par parties dans le rectangle ci-dessous, puis calculer l'intégrale K : **(3.5 pts)**

Formule : $\int_a^b U.V' \, dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V \, dt$

1) $1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

2) $K = \int_0^1 2x . \arctan x \, dx$

$U = \arctan x \Rightarrow U' = \frac{1}{1+x^2}$

$V' = 2x \Rightarrow V = x^2$

$K = [x^2 . \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$

$= \arctan 1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

$= \frac{\pi}{4} - [x - \arctan x]_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - (1 - \arctan 1)$

$= \frac{2\pi}{4} - 1$

$K = \frac{\pi}{2} - 1$

Barème sur 6 points - Durée : 20 minutes - Calculatrice collège autorisée

Test de R2.04 Sujet 3 **Nom :........................ Prénom : .... Groupe : ...**

Exercice 1 Déterminer la valeur exacte de chaque intégrale suivante, en précisant, lorsque cela est demandé, dans chaque encadré la formule entière de primitive utilisée et les expressions de U et U' **(2.5 pts)**

$I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} dx$

Formule : $\int \frac{U'}{U} dx = \ln|U| + Cte$

U = $\sin(2x)$ ⇒ U' = $2\cos(2x)$

$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln|\sin(2x)|\right]_{-\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\ln(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1})}_{=0} - \ln|\sin(\underbrace{2\pi/6}_{-\pi/3})|\right)$

$I = -\frac{1}{2}\ln\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ or $-\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$

donc $I = \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3(4t)dt$

$t \mapsto \sin^3(4t)$ est $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ - périodique

donc $L = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^3(4t)\,dt$ et comme $t \mapsto \sin^3(4t)$ est impaire sur $[-\pi/4 ; \pi/4]$, alors $L = 0$

Exercice 2 Déterminer la formule d'intégration par parties dans le rectangle ci-dessous, puis calculer l'intégrale K : **(3.5 pts)**

Formule : $\int_a^b U.V' dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$

$K = \int_0^1 (5x-1).e^{2x}dx =$

$U = 5x-1 \Rightarrow U' = 5$

$V' = e^{2x} \Rightarrow V = \frac{e^{2x}}{2}$

$K = \left[\frac{(5x-1)e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{5}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$K = \frac{4e^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$

$= 2e^2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{4}(e^2 - e^0)$

$K = \frac{3}{4}e^2 + \frac{7}{4}$

Barème sur 6 points - Durée : 20 minutes - Calculatrice collège autorisée