

1 Dans les cas suivants reconnaître les séries trigonométriques et en donner, le cas échéant, la période et les coefficients a_n et b_n .

- 1) $1 + 3 \cos 2\pi x + 4 \cos 4\pi x + 6 \cos 6\pi x$
- 2) $\sin 2x \cos 3x$
- 3) $2 \cos 4\pi x + 7 \sin 2\pi x + \frac{1}{2} \cos 5\pi x$
- 4) $\cos x + \cos \pi x$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$
- 6) $1 + \sin 2\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^3}$

SOLUTION

1) C'est une série trigonométrique de période $T = 1$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$ et $a_n = 0$ pour tout entier $n \geq 4$.

2) On transforme le produit en somme par les formules de trigonométrie.

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x).$$

C'est une série trigonométrique, $\omega = 1$, $T = 2\pi$,

$b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{1}{2}$ et tous les autres coefficients sont nuls.

3) Les périodes sont : $\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{2}{5}$.

La somme est périodique de période $T = 2$ (plus petit multiple commun à ces trois nombres),

$\omega = \pi$, $b_2 = 7$, $a_4 = 2$, $a_5 = \frac{1}{2}$, les autres coefficients sont nuls.

4) $\cos x$ a pour période 2π et $\cos \pi x$ a pour période 2 ; il n'y a pas de période commune à ces deux fonctions, ce n'est pas une série trigonométrique.

5) Série trigonométrique de période $T = 2\pi$, $\omega = 1$, $a_0 = 0$, $\forall n \geq 1$, $a_n = 1$, $b_n = 0$.

6) Série trigonométrique de période $T = 2$, $\omega = \pi$, $a_0 = 1$, $\forall n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n^3}$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ et $b_n = 0$, $\forall n \geq 3$.

2 Soit f la fonction paire et périodique de période 2π définie par : $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = 0$ si $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$.

Représenter la fonction f sur 5 périodes. Calculer ses coefficients de Fourier puis écrire sa série de Fourier.

SOLUTION

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

La fonction est paire, les coefficients b_n sont nuls.

La période $T = 2\pi$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ donc $\omega = 1$.

Pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \left[\sin nx \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2}$$

Lorsque n est pair,

$$n = 2p \text{ et } \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \sin(p\pi) = 0,$$

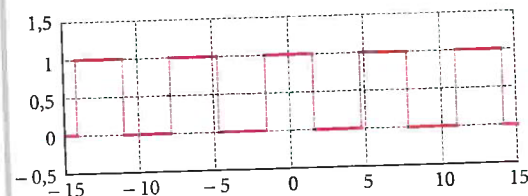
les coefficients d'indices pairs sont nuls : $a_{2p} = 0$.

Lorsque n est impair,

$$n = 2p + 1 \text{ et } \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left((2p + 1) \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^p \text{ et } a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)\pi}$$

La série de Fourier de la fonction f s'écrit :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos(2p+1)x$$



3 CRÉNEAU IMPAIR

Soit f la fonction de période $T = 2\pi$ définie par $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$ et $f(x) = -1$ si $\pi < x < 2\pi$

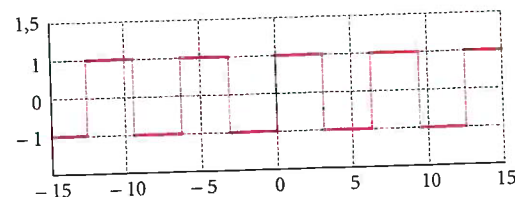
1) Représenter f .

2) Écrire la série de Fourier de f .

3) Représenter le spectre unilatéral des fréquences de f .

SOLUTION

1)



2) Calcul des coefficients de Fourier :

La fonction est impaire, les a_n sont tous nuls.

On calcule les coefficients b_n : $\omega = 1$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Les fonctions $f(x)$ et $\sin nx$ étant impaires, leur produit est une fonction paire.

On intègre de 0 à π .

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} \left[\cos nx \right]_0^\pi$$

$$= -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

Si n est pair, $\cos n\pi = 1$ donc $b_n = 0$.

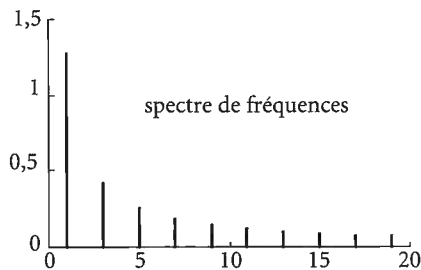
Si n est impair, $\cos n\pi = -1$ et $b_n = \frac{4}{n\pi}$.

La série de Fourier de f s'écrit :

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

3) La valeur moyenne et les harmoniques de rang pair sont nuls.

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_5 = \frac{4}{5\pi}, b_7 = \frac{4}{7\pi}, \text{ etc.}$$



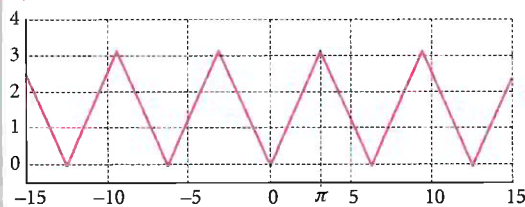
4 SIGNAL TRIANGULAIRE

Soit f la fonction paire, périodique de période $T = 2\pi$, définie par : $f(x) = x$ si $0 < x < \pi$.

- 1) Représenter la fonction f .
- 2) Calculer la série de Fourier de f .

SOLUTION

1)



2) La fonction étant paire, les coefficients b_n sont tous nuls. La série de Fourier est une série de cosinus. Le terme constant a_0 est la valeur moyenne sur une période.

C'est aussi l'aire du triangle que forme le motif divisé par la période 2π soit $a_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\omega = 1$$

On calcule les coefficients a_n :

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Les fonctions $f(x)$ et $\cos nx$ étant paires, leur produit est une fonction paire. On intègre de 0 à π .

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx$$

En posant : $u = x, u' = 1, v' = \cos nx$,

$v = \frac{1}{n} \sin nx$, la formule d'intégration par parties

$$\text{donne : } a_n = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \right]_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx$$

Tenant compte du fait que pour tout entier n , $\sin n\pi = 0$, le terme entre crochets s'annule.

Il reste :

$$a_n = -\frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{2}{n^2\pi} \left[\cos nx \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - 1)$$

Lorsque n est pair, $\cos n\pi = 1$ donc $a_n = 0$.

Lorsque n est impair, $\cos n\pi = -1$ et

$$a_n = -\frac{4}{n^2\pi}$$

La fonction f est continue donc égale en tout point à sa série de Fourier, soit :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

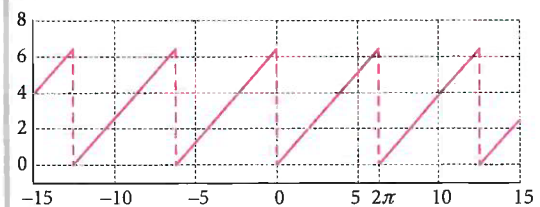
5 SIGNAL EN DENT DE SCIE

Soit f la fonction de période $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$ sur $]0 ; 2\pi[$.

- 1) Représenter f .
- 2) Calculer la série de Fourier de f .
- 3) Représenter le spectre de f .

SOLUTION

1)



2) La valeur moyenne sur une période est aussi l'aire du triangle formant le motif divisé par la

$$\text{période, soit } a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi \times 2\pi}{2} \right) = \pi.$$

La fonction f n'est ni paire, ni impaire, mais en retranchant la constante π , le graphe de f subit une translation de π vers le bas et l'on obtient une fonction impaire. Par conséquent, les coefficients a_n sont tous nuls sauf a_0 . La série de Fourier de f est une série de sinus.

On calcule les coefficients b_n :

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx$$

En posant :

$$u = x, u' = 1, v' = \sin nx, v = -\frac{1}{n} \cos nx,$$

une intégration par parties donne :

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} \left[x \cos nx \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx$$

$$b_n = -\frac{2}{n} + \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{n} \left[\sin nx \right]_0^{2\pi},$$

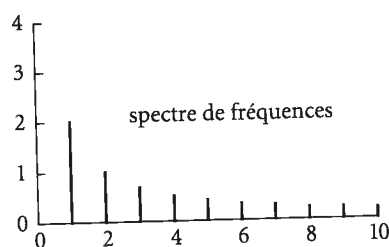
mais $\sin 2n\pi = 0$, donc $b_n = -\frac{2}{n}$

La série de Fourier de f s'écrit :

$$S(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

3) $b_1 = -2$; $b_2 = -1$

$b_3 = -\frac{2}{3}$; $b_4 = -\frac{1}{2}$ etc.

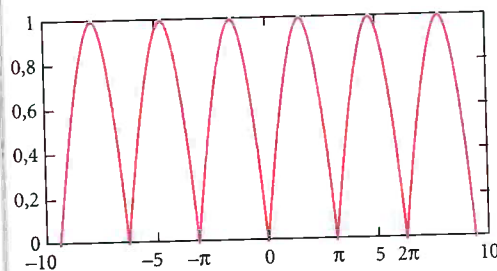


On représente la valeur absolue des coefficients b_n .

6 SINUS REDRESSÉ

Représenter puis calculer les coefficients de Fourier de la fonction f de période π , égale à $\sin x$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

SOLUTION



La fonction f est paire. Les coefficients b_n sont nuls. La valeur moyenne sur une période est :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx = -\frac{1}{\pi} \left[\cos x \right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}$$

Calcul des coefficients a_n : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

La pulsation ω est égale à 2.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos 2nx \, dx$$

En appliquant la formule :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)],$$

on obtient :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{1+2n} \left[\cos(1+2n)x \right]_0^\pi - \frac{1}{1-2n} \left[\cos(1-2n)x \right]_0^\pi \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+2n} + \frac{2}{1-2n} \right)$$

$$= \frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)}$$

La série de Fourier de f s'écrit :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

7 ÉNERGIE ET HARMONIQUE

Soit $s(t)$ le signal pair, périodique de période $T = 1$, défini par :

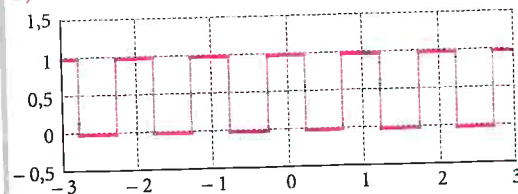
$$s(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

$$s(t) = 0 \text{ si } \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$$

- 1) Représenter le signal s pour t variant de -2 à 2 secondes.
- 2) Calculer la valeur moyenne et l'énergie de s sur une période.
- 3) Calculer les coefficients de Fourier de s .
- 4) Écrire la série de Fourier de s .
- 5) Calculer les valeurs numériques des coefficients a_n pour n allant de 0 à 6 .
- 6) Représenter le spectre des fréquences du signal s .
- 7) On note E_n l'énergie de l'harmonique de rang n . Rappeler la formule de Bessel-Parseval en termes d'énergie.
- 8) Calculer E_n pour n allant de 1 à 6 .
- 9) Combien d'harmoniques sont-elles nécessaires pour transmettre au moins, respectivement : 60 %, 80 %, 95 % de l'énergie du signal ?

SOLUTION

1)



2) La valeur moyenne sur une période est :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} s(t) \, dt = \int_{-1/4}^{1/4} dt = \frac{1}{2}$$

L'énergie du signal est :

$$E(s) = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} s^2(t) dt = \int_{-1/4}^{1/4} dt = \frac{1}{2}$$

3) Le signal est pair. Les coefficients b_n sont nuls. On calcule les coefficients a_n pour $n > 0$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega t dt = 4 \int_0^{1/4} \cos 2\pi n t dt$$

$$= \frac{4}{2\pi n} \left[\sin 2\pi n t \right]_0^{1/4} = \frac{2}{\pi n} \sin n \frac{\pi}{2}$$

Si n est pair, $a_n = 0$ et si n est impair $\sin n \frac{\pi}{2} = 1$ ou -1 . Plus précisément,

$$a_{2n} = 0 \text{ et } a_{2n+1} = \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)}$$

4) La série de Fourier du signal s s'écrit :

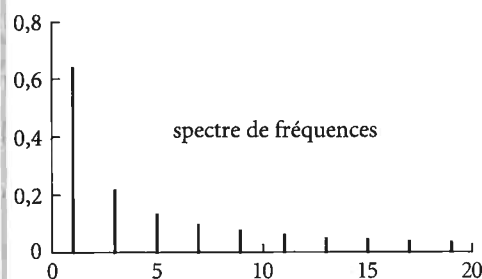
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos 2\pi(2n+1)t$$

$$5) a_0 = 0,5; \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \approx 0,636; \quad a_2 = 0,$$

$$a_3 = -\frac{2}{3\pi} \approx -0,212; \quad a_4 = 0,$$

$$a_5 = \frac{2}{5\pi} \approx 0,127; \quad a_6 = 0$$

6)



$$7) E(s) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{2}$$

puisque les coefficients b_n sont nuls.

$$8) E_1 = \frac{a_1^2}{2} \approx 0,202, E_2 \approx 0, E_3 = \frac{a_3^2}{2} \approx 0,022$$

$$E_4 = 0, E_5 = \frac{a_5^2}{2} \approx 0,0072, E_6 = 0$$

$$9) E(s) = 0,5 \text{ et } a_0^2 = 0,25$$

$$60 \% \text{ de } E(s) = 0,5 \times \frac{60}{100} = 0,3$$

et $0,25 + E_1 = 0,452$. Le fondamental suffit.

90 % de $E(s) = 0,45$. Le fondamental est encore suffisant.

$$95 \% \text{ de } E(s) = 0,475$$

et $0,25 + E_1 + E_3 + E_5 = 0,481$. Il faudra 5 harmoniques pour transmettre au moins 95 % de l'énergie du signal.

8 COEFFICIENTS DE FOURIER COMPLEXES

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction de période 1 et égale à e^{-x} sur l'intervalle $[0; 1]$.

SOLUTION

Afin d'éviter des intégrations par parties fastidieuses il est plus facile de calculer les coefficients complexes. On en déduira ensuite les coefficients réels.

La période T est égale à 1, donc la pulsation ω est égale à 2π .

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\Delta} f(x) e^{-jn\omega x} dx = \int_0^1 e^{-x} e^{-2j\pi n x} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-(1+2j\pi n)x} dx$$

$$= \frac{-1}{1+2j\pi n} \left[e^{-(1+2j\pi n)x} \right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{1+2j\pi n} (e^{-1} e^{-2j\pi n} - 1) = \frac{1 - e^{-1}}{1+2j\pi n}$$

$$= \frac{1 - e^{-1}}{1+4\pi^2 n^2} (1 - 2j\pi n)$$

Les coefficients c_n sont reliés aux coefficients a_n et

$$b_n \text{ par la formule, } c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, n > 0.$$

$$\text{On en déduit : } a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n) = 2 \frac{1 - e^{-1}}{1 + 4\pi^2 n^2}$$

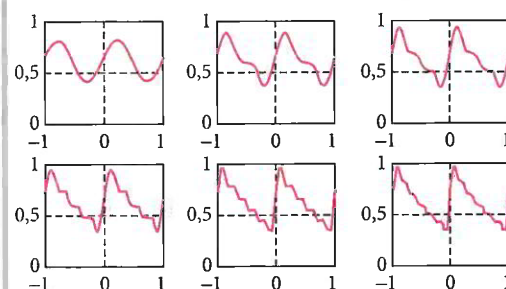
$$\text{et } b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n) = 2 \frac{2\pi n(1 - e^{-1})}{1 + 4\pi^2 n^2}$$

$$a_0 = c_0 = 1 - e^{-1}.$$

En tout point x non entier la fonction f est continue donc égale à sa série de Fourier, soit :

$$f(x) = (1 - e^{-1}) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} (\cos 2\pi n x + 2\pi n \sin 2\pi n x) \right]$$

Représentation des sommes partielles de rang 1, 2, 3, 4, 5 et 6 de la série de Fourier de f .



Programme Matlab :

```
x=[-1:0.001:1];
y=0;
for n=1:6;
y=y+(1/(1+4*pi^2*n^2))*(cos(2*pi*n*x)+2*pi*n*sin(2*pi*n*x));
```

```

z=(1-exp(-1))*(1+2*y);
subplot(2,3,n);
plot(x,z)
grid
end

```

9

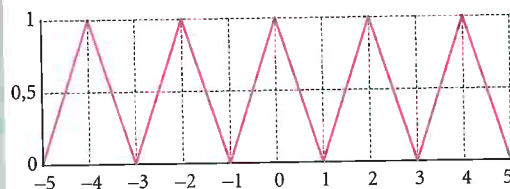
Soit s le signal de période $T = 2$ tel que :
 $s(x) = 1 - x$ sur $[0 ; 1]$ et $s(x) = 1 + x$ sur $[-1 ; 0]$.

- 1) Représenter le signal s sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de s .
- 3) Écrire la série de Fourier $S(x)$ de s .
- 4) Question annexe : Dédurre de ce qui précède les sommes des séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

SOLUTION

- 1) Représentation graphique :



- 2) Le signal est pair, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, les coefficients b_n sont nuls et la série de Fourier de s est une série de cosinus. Le terme constant a_0 est la valeur moyenne sur une période, c'est aussi l'aire du triangle que forme le motif divisé par la période :

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \times 1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

La période T est égale à 2 et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ donc $\omega = \pi$.

Pour calculer les coefficients a_n remarquons que la fonction $s(x) \cos n\pi x$ est une fonction paire en tant que produit de deux fonctions paires. Nous calculerons l'intégrale sur $[0 ; 1]$, intervalle sur lequel $s(x) = 1 - x$.

$$a_n = \int_{-1}^1 s(x) \cos n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 (1-x) \cos n\pi x \, dx$$

En posant : $u = 1 - x$, $u' = -1$, $v' = \cos n\pi x$,
 $v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x$, la formule d'intégration par parties donne :

$$a_n = 2 \left(\frac{1}{n\pi} \left[(1-x) \sin n\pi x \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx \right)$$

Le terme entre crochets est nul, il reste :

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx = \frac{-2}{n^2\pi^2} \left[\cos n\pi x \right]_0^1$$

$$a_n = \frac{-2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1)$$

Lorsque n est pair, $\cos n\pi = 1$ donc $a_n = 0$.

Lorsque n est impair, $\cos n\pi = -1$ et $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$.

- 3) La série de Fourier s'écrit :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$$

- 4) Le signal s est continu, dérivable en tout point à droite et à gauche. Dans ces conditions on a égalité pour toute valeur de la variable x entre $s(x)$ et $S(x)$. En prenant $x = 0$, on obtient :

$$s(0) = S(0) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\text{On en déduit : } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

On calcule l'énergie du signal sur une période :

$$E(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2(x) \, dx = \int_0^1 (1-x)^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

et on applique la formule de Bessel-Parseval :

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{16}{2\pi^4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

10

On considère le signal périodique s , de période 2, défini entre -1 et 1 par $s(t) = t^2$.

- 1) Représenter ce signal pour t variant entre -5 et 5 .
- 2) Calculer la valeur moyenne sur une période.
- 3) Calculer l'énergie du signal.
- 4) Calculer les coefficients de Fourier du signal s .
- 5) Écrire la série de Fourier $S(t)$ du signal $s(t)$.
- 6) Peut-on dire que $S(t) = s(t)$ pour toute valeur de t ? Pourquoi ?
- 7) En choisissant pour t une valeur bien adaptée, calculer la somme de la série :

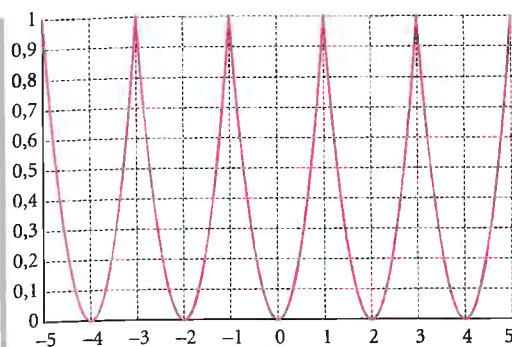
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

- 8) Rappeler la formule de Bessel-Parseval en terme d'énergie. Appliquer ce théorème et les questions précédentes au calcul de la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

SOLUTION

- 1) Représentation graphique du signal : On trace d'abord la parabole d'équation $y = t^2$ pour les valeurs de t en abscisses entre -1 et 1 , ensuite on périodise à la période 2, on obtient :



2) La valeur moyenne sur une période est le coefficient a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{6} \left[t^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} (1 - (-1)) = \frac{1}{3}$$

3) Énergie: $E(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{1}{10} \left[t^5 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}$

4) Coefficients de Fourier: Le signal est pair, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les coefficients b_n sont nuls.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega t dt,$$

$T = 2$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ d'où $\omega = \pi$, de plus $s(t) = t^2$ sur l'intervalle $[-1; 1]$,

$$a_n = \int_{-1}^1 s(t) \cos n\pi t dt = 2 \int_0^1 t^2 \cos n\pi t dt$$

(on double l'intégrale et on intègre sur $[0; 1]$ car la fonction $t^2 \cos n\pi t$ est une fonction paire).

On pose $u = t^2$, $u' = 2t$, $v' = \cos n\pi t$,

$v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t$ et on intègre par parties:

$$a_n = 2 \left(\left[\frac{t^2}{n\pi} \sin n\pi t \right]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 2t \sin n\pi t dt \right)$$

Mais, $\sin n\pi = 0$ pour toutes valeurs entières de n , donc:

$$a_n = -\frac{4}{n\pi} \int_0^1 t \sin n\pi t dt,$$

On pose:

$$u = t, u' = 1, v' = \sin n\pi t, v = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi t$$

et on intègre une deuxième fois par parties:

$$a_n = -\frac{4}{n\pi} \left(-\frac{1}{n\pi} \left[t \cos n\pi t \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi t dt \right)$$

Comme la dernière intégrale est nulle ($\sin n\pi = \sin 0 = 0$), on trouve:

$$a_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos n\pi = \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2}$$

car $\cos n\pi = 1$ ou -1 suivant que n est un entier pair ou impair.

$$5) S(t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi t}{n^2}$$

6) La fonction est en tout point dérivable à droite et à gauche. Elle est de plus continue. D'après le théorème de Dirichlet $S(t) = s(t)$ pour toutes valeurs de t .

7) On a:

$$S(0) = s(0) = 0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

$$d'où \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

8) $E(s) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n$ où E_n désigne l'énergie de l'harmonique de rang n ,

$$E_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \frac{8}{n^4 \pi^4}; E(s) = \frac{1}{5} \text{ et } a_0 = \frac{1}{3}.$$

En remplaçant dans la formule on obtient:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^4 \pi^4} \text{ qui donne: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

II

Soit s le signal impair, périodique de période $T = 1$, défini par:

$$s(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

$$s(t) = 0 \text{ si } \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}$$

1) Représenter le signal s pour t variant de -2 à 2 secondes.

2) Calculer la valeur moyenne et l'énergie de s sur une période.

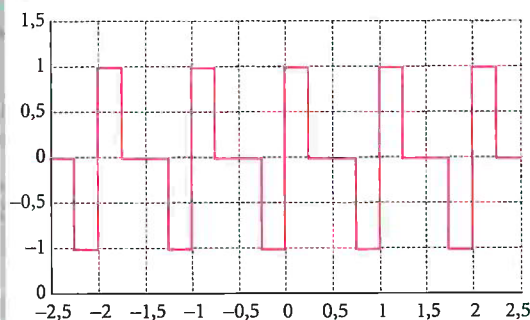
3) Calculer les coefficients de Fourier de s .

4) Calculer les valeurs numériques des coefficients b_n pour n allant de 0 à 8 .

5) Représenter le spectre des fréquences du signal.

SOLUTION

1) Représentation graphique du signal:



2) Le signal étant impair, tous les coefficients a_n sont nuls. La valeur moyenne est le coefficient a_0 et $a_0 = 0$.

$$\text{Energie : } E(s) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} s^2(t) dt$$

La fonction s^2 est paire donc,

$$E(s) = 2 \int_0^{1/2} s^2(t) dt = 2 \int_0^{1/4} dt, \text{ car } s^2 \text{ prend la}$$

valeur 1 entre 0 et $\frac{1}{4}$ et la valeur 0 entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

$$\text{Conclusion : } E(s) = \frac{1}{2}.$$

3) Calcul des coefficients b_n :

$$T = 1 \text{ donc } \omega = 2\pi.$$

$$b_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} s(t) \sin n\omega t dt$$

$$= 2 \int_{-1/4}^{1/4} s(t) \sin 2\pi n t dt$$

Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire :

$$b_n = 4 \int_0^{1/4} s(t) \sin 2\pi n t dt = 4 \int_0^{1/4} \sin 2\pi n t dt$$

$$= \frac{-4}{2\pi n} \left[\cos 2\pi n t \right]_0^{1/4} = \frac{-2}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right)$$

Si n est un nombre impair, $n = 2p + 1$

$$\text{et } \cos \frac{\pi n}{2} = 0, \text{ donc } b_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}$$

Si n est un nombre pair, $\cos \frac{\pi n}{2}$ vaut 1 ou -1.

Plus précisément : si n est un multiple de 4,

$$n = 4p \text{ et } \cos \frac{\pi n}{2} = \cos 2p\pi = 1, \text{ donc } b_{4p} = 0$$

et si n n'est pas multiple de 4, $n = 4p+2$ et

$$\cos \frac{\pi n}{2} = \cos (2p\pi + \pi) = -1,$$

$$\text{donc } b_{4p+2} = \frac{4}{(4p+2)\pi} = \frac{2}{(2p+1)\pi}$$

4) Valeurs numériques :

$$b_1 = b_2 = \frac{2}{\pi} \approx 0,64;$$

$$b_3 = \frac{2}{3\pi} \approx 0,21;$$

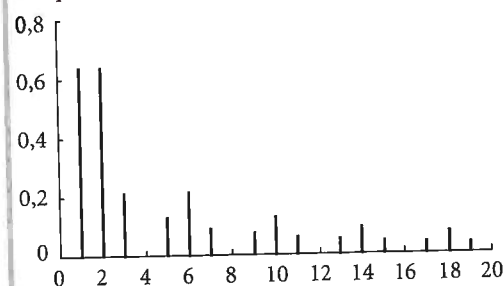
$$b_4 = 0;$$

$$b_5 = \frac{2}{5\pi} \approx 0,13;$$

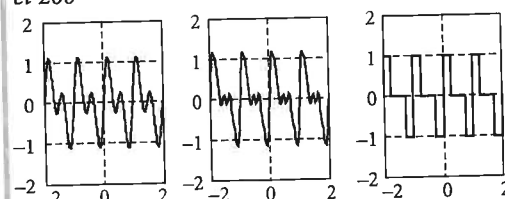
$$b_6 = \frac{2}{3\pi} \approx 0,21;$$

$$b_7 \approx 0,09 \text{ et } b_8 = 0$$

5) Spectre du signal :



Représentation des sommes partielles de rang 2, 5 et 200



Ces figures ont été réalisées à l'aide du logiciel Matlab.

12

On considère le signal défini par la fonction f de période $T = 2$ telle que pour tout t de l'intervalle $[-1; 1]$, $f(t) = e^t$.

1) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-5; 5]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier complexes :

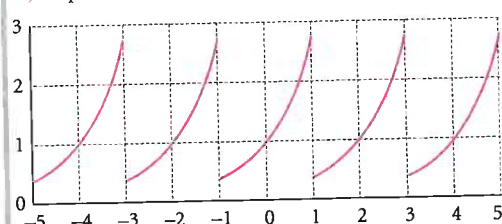
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

3) En déduire les coefficients de Fourier réels : a_0 , a_n et b_n .

4) Écrire le développement de f en série de Fourier complexe et réelle.

SOLUTION

1) Représentation graphique :



2) Calcul des coefficients de Fourier complexes : $\omega = \pi$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^t e^{-jn\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{(1-jn\pi)t} dt \\ &= \frac{1}{2(1-jn\pi)} \left[e^{(1-jn\pi)t} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2(1-jn\pi)} (e^{1-jn\pi} - e^{-1+jn\pi}) \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2(1 - jn\pi)} (e - e^{-1})$$

$$= \frac{(-1)^n (e - e^{-1})}{2(1 + 4n^2\pi^2)} (1 + jn\pi)$$

3) Les coefficients c_n sont reliés aux coefficients a_n et b_n par la formule, $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, pour tout entier $n > 0$. On en déduit :

$$a_n = 2\text{Re}(c_n) = \frac{(-1)^n (e - e^{-1})}{(1 + 4n^2\pi^2)}$$

$$\text{et } b_n = \frac{(-1)^n (e - e^{-1}) n\pi}{(1 + 4n^2\pi^2)}$$

$$a_0 = c_0 = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

4) La série de Fourier complexe s'écrit :

$$S(t) = \frac{e - e^{-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + 4n^2\pi^2)} e^{jn\pi t}$$

et la série réelle :

$$S(t) = (e - e^{-1}) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + 4n^2\pi^2)} \times (\cos n\pi t + n\pi \sin n\pi t) \right)$$

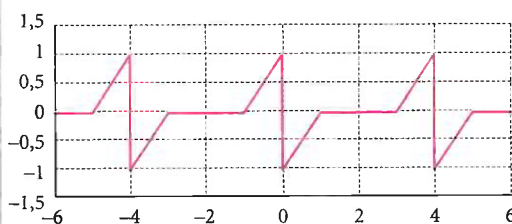
13

Soit s le signal impair et périodique de période 4, tel que $s(t) = t - 1$ pour tout t entre 0 et 1, et $s(t) = 0$ pour tout t entre 1 et 2.

- 1) Représenter le signal s pour t variant de -4 à 4 .
- 2) Calculer l'énergie du signal.
- 3) Calculer les coefficients de Fourier de s .
- 4) Donner une valeur approchée des coefficients b_n , pour n allant de 1 à 8.
- 5) Représenter le spectre des fréquences du signal.
- 6) Quel est le nombre minimum d'harmoniques nécessaires pour transmettre 90 % de l'énergie du signal.

SOLUTION

1) Représentation graphique :



2) Énergie : $E(s) = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 s^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 s^2(t) dt$, (s^2 est une fonction paire).

$$E(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 (t-1)^2 dt = \frac{1}{6} \left[(t-1)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

3) Coefficients de Fourier : Le signal est impair, les a_n sont tous nuls. La période T vaut 4 donc

$$\omega = \frac{\pi}{2}, (T = \frac{2\pi}{\omega}).$$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 s(t) \sin n \frac{\pi}{2} t dt = \int_0^1 (t-1) \sin n \frac{\pi}{2} t dt$$

on intègre par parties :

$$u = t-1, u' = 1, v' = \sin n \frac{\pi}{2} t, v = \frac{-2}{n\pi} \cos n \frac{\pi}{2} t$$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi} \left[(t-1) \cos n \frac{\pi}{2} t \right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n \frac{\pi}{2} t dt$$

$$= \frac{-2}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\sin n \frac{\pi}{2} t \right]_0^1$$

$$= \frac{-2}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin n \frac{\pi}{2}$$

Si n est un nombre pair, $n = 2p$, $\sin n \frac{\pi}{2} = 0$

$$\text{et } b_n = b_{2p} = \frac{-1}{p\pi}$$

Si n est impair, $n = 2p+1$,

$$\sin n \frac{\pi}{2} = \sin (2p+1) \frac{\pi}{2} = \sin (p\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^p$$

$$\text{d'où } b_{2p+1} = \frac{-2}{(2p+1)\pi} + \frac{4(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2}$$

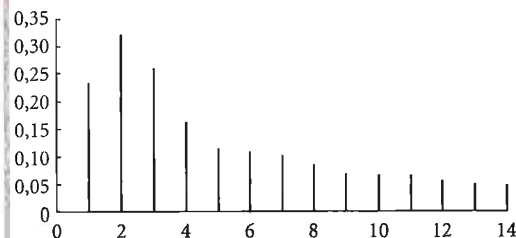
4) À 10^{-3} près, on a les résultats suivant :

$$b_1 = -0,231; b_2 = -0,318; b_3 = -0,257;$$

$$b_4 = -0,159; b_5 = -0,111; b_6 = -0,106;$$

$$b_7 = -0,099; b_8 = -0,079.$$

5)



$$6) E(s) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^2}{2}$$

puisque les coefficients a_n sont nuls.

90 % de $E(s) = 0,15$ et un programme de calculs sur calculatrice ou ordinateur montre qu'il faut aller jusqu'à l'harmonique de rang 12 pour dépasser la valeur 0,15 :

$$\sum_{n=1}^{12} \frac{b_n^2}{2} = 0,1505.$$

14

Soit s le signal pair, périodique de période $T = 1$, défini par :

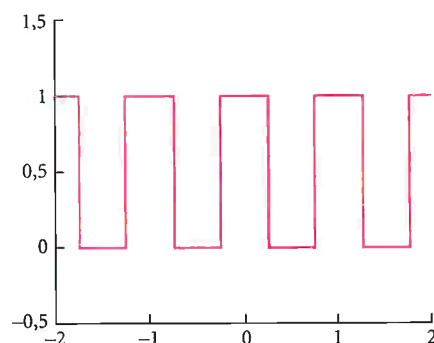
$$s(t) = 1 \text{ si } 0 < t < \frac{1}{4}$$

$$s(t) = 0 \text{ si } \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$$

- 1) Représenter le signal s .
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de s .
- 3) Écrire la série de Fourier de s .
- 4) Représenter le spectre de fréquences du signal s .

SOLUTION

1)



2) Le signal est pair, les coefficients b_n sont nuls.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} s(t) dt = \int_{-1/4}^{1/4} dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-1/2}^{1/2} s(t) \cos n\omega t dt = 4 \int_0^{1/4} \cos 2\pi n t dt$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[\sin 2\pi n t \right]_0^{1/4} = \frac{2}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2}$$

Si n est un entier pair, $n = 2p$, p entier et

$$\sin 2p \frac{\pi}{2} = \sin p\pi = 0; a_{2p} = 0.$$

Si n est un entier impair, $n = 2p + 1$ et

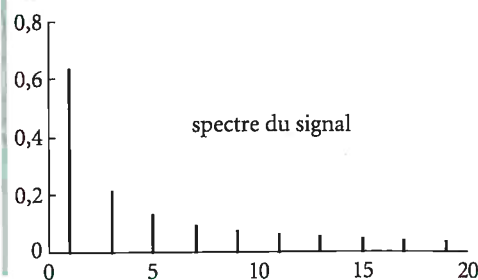
$$\sin (2p + 1) \frac{\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + p\pi \right) = (-1)^p$$

$$\text{d'où } a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)\pi}.$$

3) Série de Fourier :

$$S(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos 2\pi(2p+1)t$$

4)



15

Soit s le signal pair, périodique de période $T = 2$, défini par :

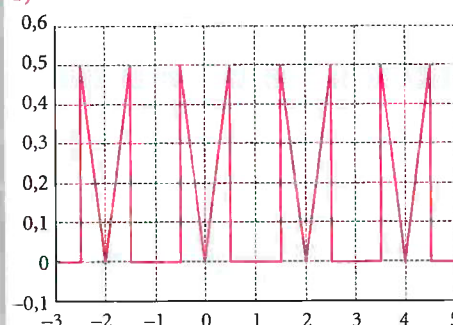
$$s(t) = t \text{ si } 0 < t < \frac{1}{2}$$

$$s(t) = 0 \text{ si } \frac{1}{2} < t < 1$$

- 1) Représenter le signal s .
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de s .
- 3) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des coefficients a_n , n allant de 0 à 8.
- 4) Représenter le spectre de fréquences du signal s .

SOLUTION

1)



2) Le signal est pair, les coefficients b_n sont nuls.

$$a_0 = \frac{1}{8} \text{ et pour tout naturel non nul,}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi^2} (\cos n \frac{\pi}{2} - 1)$$

$$a_{4p} = 0$$

$$a_{4p+1} = \frac{1}{\pi(4p+1)} - \frac{2}{\pi^2(4p+1)^2}$$

$$a_{4p+2} = -\frac{4}{\pi^2(4p+2)^2}$$

$$a_{4p+3} = \frac{1}{\pi(4p+3)} - \frac{2}{\pi^2(4p+3)^2}$$

$$3) a_0 = 0,125$$

$$a_1 = 0,116$$

$$a_2 = -0,101$$

$$a_3 = -0,129$$

$$a_4 = 0$$

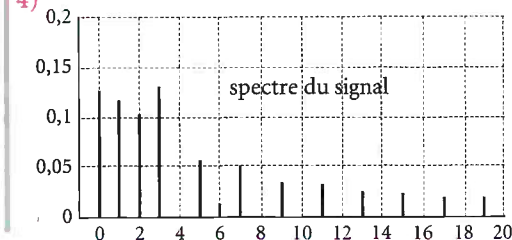
$$a_5 = 0,056$$

$$a_6 = -0,011$$

$$a_7 = -0,05$$

$$a_8 = 0$$

4)



16

Soit ε un réel positif et s le signal pair, périodique de période $T = 1$, défini par :

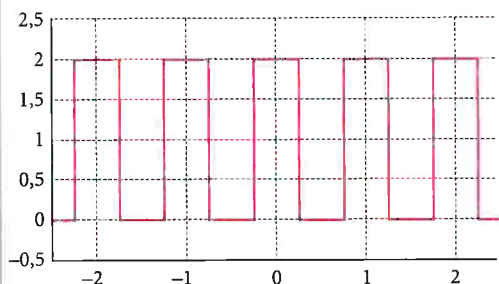
$$s(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } 0 \leq t < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$s(t) = 0 \text{ si } \frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{1}{2}$$

- 1) Représenter le signal s pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de s en fonction de ε .
- 3) Écrire la série de Fourier du signal s .
- 4) En prenant $\varepsilon = \frac{1}{\pi}$, représenter le spectre de fréquences du signal s .
- 5) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

SOLUTION

1)

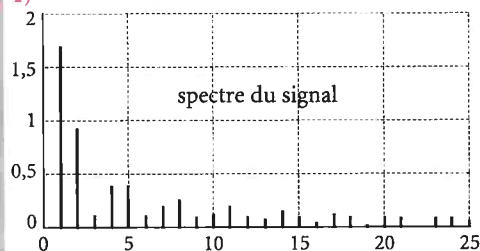


2) Le signal est pair, les coefficients b_n sont nuls. $a_0 = 1$ et pour tout naturel n non nul,

$$a_n = \frac{2}{\pi n \varepsilon} \sin \pi n \varepsilon$$

$$3) S(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \pi n \varepsilon}{\pi n \varepsilon} \cos 2\pi n t$$

4)



5) Avec $\varepsilon = \frac{1}{\pi}$, la série de Fourier s'écrit :

$$S(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} \cos 2\pi n t$$

En prenant $t = 0$, on obtient :

$$S(0) = \pi = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

$$\text{d'où l'on déduit : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

17

Soit f la fonction de période $T = 2\pi$ valant π sur $[0; \pi]$ et $-\pi$ sur $[-\pi; 0]$.

- 1) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- 2) Écrire la série de Fourier $S(x)$ de f .

SOLUTION

1) $a_n = 0$ pour tout entier n .

$$b_n = \frac{2}{n} (1 - \cos n\pi), b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{4}{2p+1}$$

$$2) S(x) = 4 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)}{2p+1}$$

18

On considère le signal s , pair et périodique, de période 2, défini entre 0 et 1 par : $s(t) = t$.

- 1) Calculer la valeur moyenne sur une période.
- 2) Calculer l'énergie sur une période.
- 3) Que peut-on dire des coefficients de Fourier b_n ? Pourquoi?
- 4) Calculer les coefficients de Fourier a_n , $n > 0$.
- 5) Écrire la série de Fourier $S(t)$ du signal $s(t)$.
- 6) Peut-on dire que $S(t) = s(t)$ pour toute valeur de t ? Pourquoi?

SOLUTION

$$1) V_{\text{moy}} = a_0 = \frac{1}{2}$$

$$2) E(s) = \frac{1}{3}$$

3) $b_n = 0$ car s est pair.

$$4) a_n = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)^2 \pi^2}$$

$$5) S(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)\pi t}{(2p+1)^2}$$

6) La fonction s est continue, dérivable en tout point à droite et à gauche, d'après le théorème de Dirichlet $f(t) = S(t)$ pour toute valeur du réel t .

19

Un signal f , 2π périodique, prend la valeur 4 pour tout t entre 0 et π et la valeur 2 entre π et 2π .

- 1) Représenter le signal f entre -2π et 4π .
- 2) Que pouvez-vous dire du signal $g(t) = f(t) - 3$?
- 3) Calculer les coefficients de Fourier.
- 4) Écrire la série de Fourier $S(t)$ associée au signal f .