

théorème de Dirichlet appliqué à l'exemple

Page 14

→ hyp 1: Sur $[0; 2[$ x est continue sauf en 0 et en 1

$$\left. \begin{array}{l} \text{où } x(0^-) = 0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} x(t) \quad x(1^-) = 1 = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} x(t) \\ x(0^+) = 1 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t) \quad x(1^+) = 0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} x(t) \end{array} \right\} \text{ sont finies}$$

→ hyp 2: Sur $[0; 2[$ x est dérivable sauf en 0 et 1

$$\left. \begin{array}{l} \text{où } x'(0^-) = 0 \quad x'(1^-) = 0 \\ x'(0^+) = 0 \quad x'(1^+) = 0 \end{array} \right\} \text{ sont finies.}$$

→ Conclusion: La série de Fourier converge en tout $t \in \mathbb{R}$,

et a pour somme:

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{2k+1} = \begin{cases} x(t) & \forall t \notin \mathbb{Z} \\ \begin{array}{c} x(0^-) \quad x(0^+) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0+1 \\ \hline 2 \end{array} = \frac{1}{2} & \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Exercice : En déduire la valeur de la série numérique : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = S$

Dans la relation (*) on remplace t par $\frac{1}{2}$ et on obtient :

$$S_x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = (-1)^k}{2k+1} = x\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } x \text{ est continue en } \frac{1}{2}.$$

$$k \geq 0 \quad \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_0 + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_1 \cdot \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} = (-1)^k$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} S = 1 \Leftrightarrow S = +\frac{\pi}{4}$$

Remarque : $\pi = +4 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$