

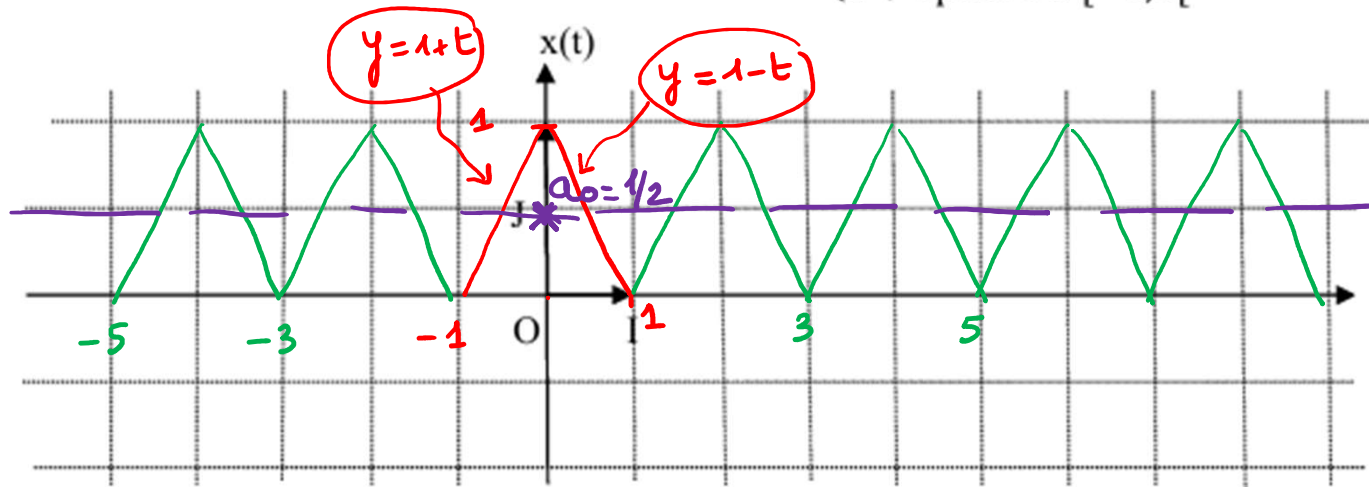
II. Développement d'un signal triangle périodique en série de Fourier

Page 18&19&20 Chapitre 1

Notes

1) Série de Fourier d'un signal triangle périodique

Soit x , la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{pour } t \in [0;1[\\ 1 + t & \text{pour } t \in [-1;0[\end{cases}$



i) Représenter le signal x . Déterminer T , ω et les coefficients de Fourier de x :

$$T = 2 \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

x est paire, donc $b_p = 0 \forall p \geq 1$.

Par lecture graphique $a_0 = 1/2$

$p \geq 1$ Notes

$$a_p = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(p\omega t) dt = \frac{2}{2} \cdot \int_{-1}^1 \underbrace{x(t)}_{\text{paire}} \cdot \underbrace{\cos(p\pi t)}_{\text{paire}} dt$$

$\text{paire} \times \text{paire} = \text{paire}$

$$a_p = 2 \times \int_0^1 (1-t) \cdot \cos(p\pi t) dt$$

IPP: $\begin{cases} U = 1-t \\ V' = \cos(p\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = -1 \\ V = \frac{\sin(p\pi t)}{p\pi} \end{cases}$

$$a_p = 2 \times \left\{ \underbrace{\left[\frac{(1-t) \cdot \sin(p\pi t)}{p\pi} \right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{p\pi} \int_0^1 \sin(p\pi t) dt \right\}$$

$$a_p = \frac{2}{p\pi} \times \left[-\frac{\cos(p\pi t)}{p\pi} \right]_0^1$$

$$a_p = \frac{2}{p^2 \pi^2} \left(1 - \underbrace{\cos(p\pi)}_{=(-1)^p} \right) \quad \forall p \geq 1$$

Valeur moyenne du signal x : $a_0 = 1/2$

Fondamental du signal x : $H_1(t) = a_1 \cos(\pi t) + b_1 \sin(\pi t) = \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t)$

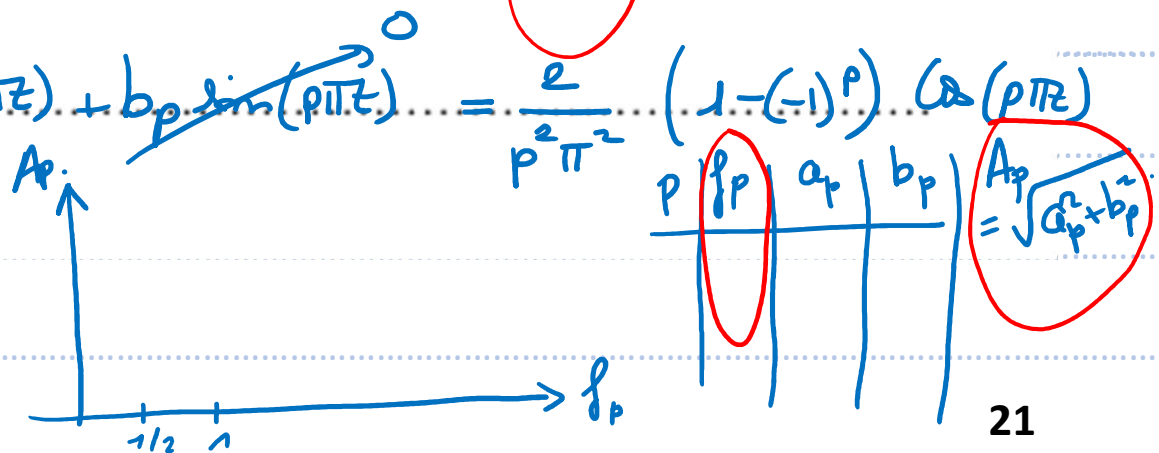
$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

Harmonique de rang 2 : $H_2(t) = a_2 \cos(2\pi t) + b_2 \sin(2\pi t) = 0$

Harmonique de rang 3 : $H_3(t) = a_3 \cos(3\pi t) + b_3 \sin(3\pi t) = \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi t)$

Harmonique de rang p : $H_p(t) = a_p \cos(p\pi t) + b_p \sin(p\pi t) = \frac{2}{p^2 \pi^2} (1 - (-1)^p) \cos(p\pi t)$

$p \geq 1$					
p	1	2	3	4	5
f_p	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$
A_p	$4/\pi^2$	0	$4/9\pi^2$	0	$4/25\pi^2$



ii) Ecrire la série de Fourier du signal x :

$$S_x(t) = a_0 + \sum_{p \geq 1} a_p \cos(p\pi t)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p \geq 1} \frac{2(1 - (-1)^p)}{p^2 \pi^2} \cos(p\pi t)$$

$(-1)^{2k+1} = -1$

Comme les termes pairs sont tous nuls, alors on somme sur les impairs

et on obtient : $S_x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 0} \frac{4(1+1)}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos((2k+1)\pi t)$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2}$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \pi t}{1^2} + \frac{\cos 3\pi t}{9} + \frac{\cos 5\pi t}{25} + \frac{\cos 7\pi t}{49} \right)$$

t	x(t)	S(t)
-1	1+t	0
-0.5		
0	1-t	1
1		

II. Développement d'un signal triangle périodique en série de Fourier

Notes

1

1) Série de Fourier d'un signal triangle périodique

Soit x , la fonction de période 2, définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{pour } t \in [0;1[\\ 1 + t & \text{pour } t \in [-1;0[\end{cases}$

2

Après la question ii) Tracer dans un même repère la courbe représentant x , et S à l'ordre 7 pour t variant de -1 à 1 avec un pas de tracé de 0,1. Puis, tracer le diagramme en bâton du spectre en fréquence.

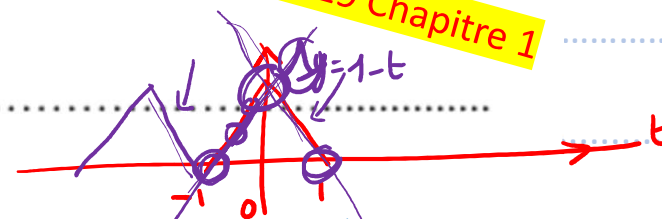
t	x(t)	S(t)
-1	0	0,02520112
-0,9	0,1	0,09294402
-0,8	0,2	0,20480061
-0,7	0,3	0,29674094
-0,6	0,4	0,40167157
-0,5	0,5	0,5
-0,4	0,6	0,59832843
-0,3	0,7	0,70325906
-0,2	0,8	0,79519939
-0,1	0,9	0,90705598
0	1	0,97479888
0,1	0,9	0,90705598
0,2	0,8	0,79519939
0,3	0,7	0,70325906
0,4	0,6	0,59832843
0,5	0,5	0,5
0,6	0,4	0,40167157
0,7	0,3	0,29674094
0,8	0,2	0,20480061
0,9	0,1	0,09294402
1	0	0,02520112

p	a0	ap	bp	Ap
1	0,5	0,40528473	0	0,40528473
2		0	0	0
3		0,04503164	0	0,04503164
4		0	0	0
5		0,01621139	0	0,01621139
6		0	0	0
7		0,00827112	0	0,00827112
8		0	0	0
9		0,00500352	0	0,00500352
10		0	0	0
11		0,00334946	0	0,00334946
12		0	0	0
13		0,00239813	0	0,00239813
14		0	0	0
15		0,00180127	0	0,00180127
16		0	0	0
17		0,00140237	0	0,00140237
18		0	0	0
19		0,00112267	0	0,00112267
20		0	0	0

2) Convergence de la série de Fourier du signal x (Théorème de Dirichlet)

Page 19 Chapitre 1

Type 1: x est continue sur $[-1; 1[$



Type 2: x est dérivable sur $[-1; 1[$ sauf en -1 et 0

où $x'(-1^-) = -1$; $x'(-1^+) = +1$; $x'(0^-) = +1$; $x'(0^+) = -1$ sont finies

Conclusion La série de Fourier de x converge en tout point

$t \in \mathbb{R}$ et à pour somme :

$$S_x(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = x(0) = 1$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2} = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ car } x \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

$\left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \right)$

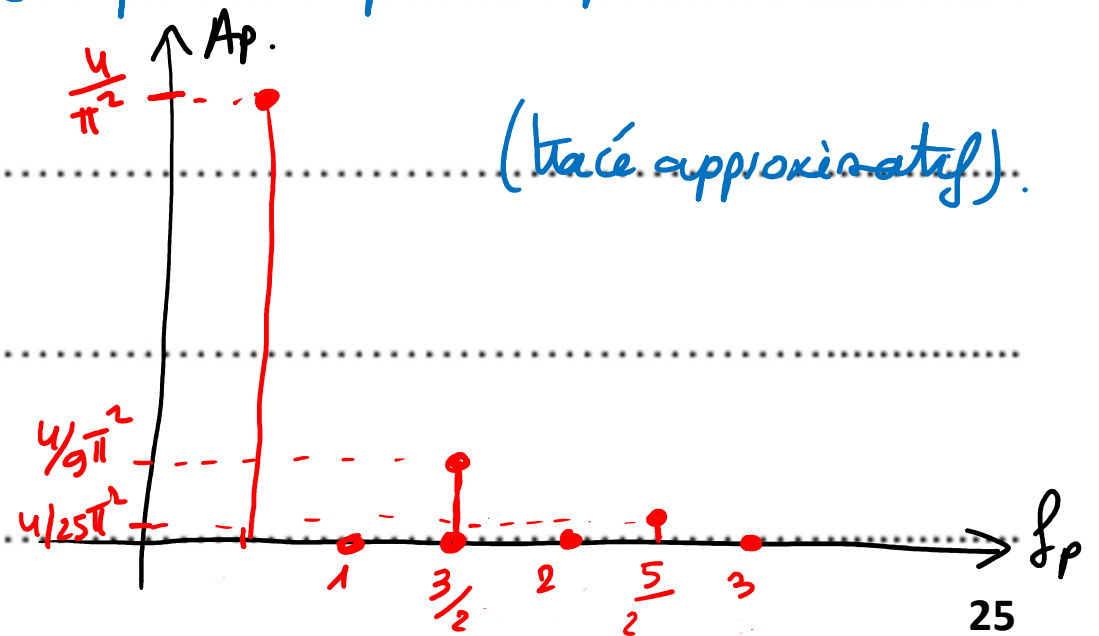
3) Spectre du signal x

On trace en abscisses la fréquence: $p\omega = 2\pi f_p \Leftrightarrow f_p = \frac{p\omega}{2\pi} = \frac{p}{2}$

et en ordonnée la amplitude de harmoniques: $A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} \quad \forall p \geq 1$

Ici $b_p = 0$, donc $A_p = \sqrt{a_p^2} = |a_p| = a_p$ car $a_p > 0 \quad \forall p \geq 1$

f_p	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}=3$
A_p	$\frac{4}{\pi^2}$	0	$\frac{4}{9\pi^2}$	0	$\frac{4}{25\pi^2}$	0



Notes

4) En déduire

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'après 1)ii $S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^2} = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

En particulier pour $t=0$: $S_x(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = x(0) = 1$ vérifie

Ainsi: $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$