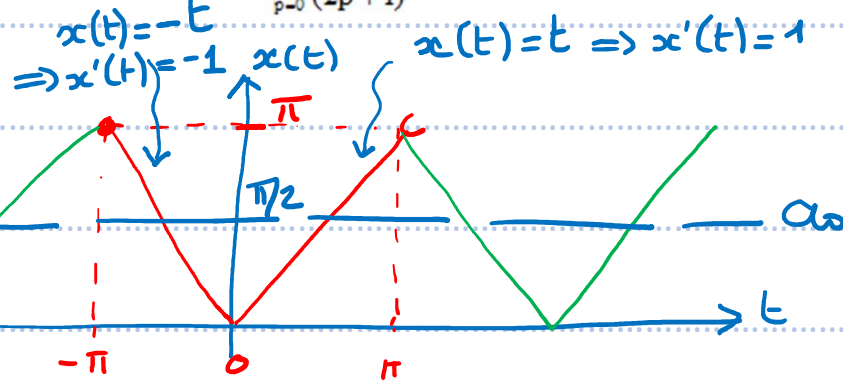


Corrigé du DM2

Concernant l'exercice 1 du DM2 : 1) Le corriger à l'aide des solutions ci-après

Soit x , la fonction de période 2π , définie par : $x(t) = |t|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

- 1) Dessiner le graphe de x ,
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de x ,
- 3) Montrer que la série de Fourier de x peut s'écrire : $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2}$
- 4) En utilisant le théorème de Dirichlet, montrer que la série de Fourier de x est convergente pour toute valeur de t , quelle est alors sa somme ?
- 5) En déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.



- ② $T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$
 x est paire donc $b_n = 0 \forall n \geq 1$

* $a_0 = \frac{\pi}{2}$ par lecture graphique

ou : $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x(t)}_{\text{paire}} dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x(t)}_{=|t|=t \text{ car } t > 0} dt$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

* $a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x(t) \cdot \cos(nt)}_{\text{paire}} dt$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x(t)}_{=|t|=t \text{ car } t > 0} \cdot \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \cos(nt) dt$$

IPP : $\begin{cases} u = t \\ v' = \cos(nt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \left[t \cdot \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi \sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{1}{n} \left[\frac{-\cos(n\pi)}{n} \right]_0^\pi \right\}$$

$n \in \mathbb{N}^+ \text{ donc } = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{n^2} (-\cos(n\pi) + \cos 0) \right\} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

③ Série de Fourier de x : $a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt)$

$$S_x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nt)$$

$$S_x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{-\frac{2}{1^2}}_{n=1} \cos(1t) + \underbrace{0}_{n=2} + \underbrace{-\frac{2}{3^2}}_{n=3} \cos(3t) + \underbrace{0}_{n=4} + \underbrace{-\frac{2}{5^2}}_{n=5} \cos(5t) + \dots \right)$$

Les termes pairs étant tous nuls, on somme

sur les impairs: $S_x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{-2}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)t)$

Donc: $S_x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$

④ théorème de Dirichlet:

hyp1: x est continue sur $[-\pi; \pi[$

hyp2: x est dérivable en $[-\pi; \pi[$ sauf en

$-\pi$ et 0 où: $\begin{cases} x'(-\pi^-) = 1 & x'(0^-) = -1 \\ x'(-\pi^+) = -1 & x'(0^+) = +1 \end{cases}$ voir GRAPHES

Conclusion La série de Fourier

de x converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

et: $S_x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2} = x(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$, car x est continue sur $\mathbb{R}$

⑤ $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ s'obtient en

posant $t=0$ dans la conclusion du th. de

$$\text{Dirichlet: } S_x(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = x(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{\pi}{2} \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice2 du DM2 :

$$\textcircled{3} C_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{t}_{\frac{2\pi}{2\pi}} e^{-ikt} dt$$

$$\begin{cases} u = t \\ u' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v' = e^{-ikt} \\ v = \frac{e^{-ikt}}{-ik} \end{cases}$$

$$C_k = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[\frac{te^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dt \right\}$$

$$C_k = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2\pi \cdot \underbrace{e^{-ik2\pi}}_{=1}}{-ik} + \frac{1}{ik} \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{2\pi} \right\}$$

$$e^{-ik2\pi} = \cos(k2\pi) - i \sin(k2\pi)$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 - i \cdot 0$$

$$C_k = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2\pi \cdot i}{-ik} + \frac{1}{(ik)^2} \underbrace{(e^{-ik2\pi} - e^0)}_{=0} \right\}$$

$$C_k = \frac{i}{2\pi k} ; k \in \mathbb{Z}^*$$

Série de Fourier complexe: $G_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} C_k e^{ik\omega t}$

Remarque

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ikt}}{k}$$

Retrouvons les coefficients de Fourier réels:

$$C_0 = \frac{1}{2} \quad C_k = \frac{i}{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$a_0 = C_0$$

$$\text{et } C_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = 2\operatorname{Re}(C_k) \\ b_k = -2\operatorname{Im}(C_k) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi: } \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_k = 2\operatorname{Re}\left(\frac{i}{2\pi k}\right) = 0 \quad \forall k \geq 1 \\ b_k = -2\operatorname{Im}\left(\frac{i}{2\pi k}\right) = -\frac{1}{k\pi} \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

Explications: $2C_k = \underbrace{a_k}_{\operatorname{Re}(2C_k)} - ib_k$
 $= 2\operatorname{Re}(C_k)$

et $-b_k = \operatorname{Im}(2C_k) \Leftrightarrow b_k = -2\operatorname{Im}(C_k)$

$$\text{Série de Fourier de } x = a_0 + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nt)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n}$$

Th. de Dirichlet:

hyp1: x est continue sur $[0; 2\pi[$ sauf en 0 où $x(0^-) = 1$ $x(0^+) = 0$ est finis.

hyp2: x est dérivable sur $[0; 2\pi[$ sauf en 0 où $x'(0^-) = x'(0^+) = \frac{1}{2\pi}$ voir GRAPHE

Conclusion: la série de Fourier de x

Converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n} = \begin{cases} x(t) & \forall t \neq 2k\pi \\ \frac{1}{2} & \forall t = 2k\pi \end{cases} \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Remarque $t \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, se note aussi $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$