

Nom : Prénom : Groupe :

Ce test et sa correction vous permettront d'identifier, si tel est le cas, vos lacunes en Mathématiques. Il sera noté. Les calculatrices sont interdites. La question 12 ne compte pas dans la note finale (poursuites d'études).

Question 1 Puissances

a) Ecrire les nombres suivants en notation scientifique : (rappel : $0,03 = 3 \times 10^{-2}$ en notation scientifique)

$$A = 7 \times 5^2 \times 10^5 \times 2^2 = 7 \times 10^5 \times 10^2 = 7 \times 10^7$$

$$B = (-2 \times 10^3)^2 = (-2)^2 \times (10^3)^2 = 4 \times 10^6$$

$$C = \frac{10^7}{(2^3 \times 5^3)^2} = \frac{10^7}{(10^3)^2} = \frac{10^7}{10^6} = 10$$

b) Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = 7a^3 \times a^4 = 7a^7$$

$$B = 4b^2 - (3 \cdot b)^2 = 4b^2 - 9b^2 = -5b^2$$

$$C = (c^4)^3 \times c^{-5} = c^{12} \times c^{-5} = c^7$$

Question 2 Fractions

a) Les nombres a, b, c, d, y et z étant non nuls, complétez les formules suivantes :

$$\frac{d}{c} + \frac{b}{a} = \frac{da + bc}{ac} \quad \text{avec } a, c \neq 0$$

$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{a} = \frac{bc}{ad} \quad \text{avec } a, b, d \neq 0$$

$$\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y} \times \frac{1}{z} = \frac{x}{yz} \quad \text{avec } z \neq 0$$

b) Simplifiez les nombres et les expressions suivantes :

$$A = \frac{14}{\frac{2}{15}} = 14 \times \frac{15}{2} = 7 \times 15 = 105$$

$$B = \frac{3^2}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{x}{4} + \frac{3}{10} = \frac{10x + 12}{40} = \frac{2(5x + 6)}{40} = \frac{5x + 6}{20}$$

$$D = \frac{\frac{4ab^2}{\frac{c}{8c}}}{a^2} = \frac{4ab^2}{\frac{c}{8c}} \times \frac{a^2}{8c} = \frac{4a^3b^2}{8c^2} = \frac{a^3b^2}{2c^2} \quad \text{avec } a, c \neq 0$$

Question 3 Racines carrées : Simplifiez A au maximum, et faites disparaître les racines carrées du dénominateur de B.

$A = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$

$B = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \times \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ où $x \geq 0$

Question 4 Identités remarquables

a) Développez les formules suivantes :

$(Z - t)(Z + t) = Z^2 - t^2$

$(X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$

b) Factorisez l'expression suivante :

$R^2 + T^2 - 2TR = (R - T)^2$

c) Développez A, factorisez B et simplifiez C :

$A = (5 - 2t)^2 = 25 - 20t + 4t^2$

$B = 3(R^2 - 1) - (R + 1) = 3(R+1)(R-1) - (R+1) = (R+1)(3R-4)$

$C = \frac{(2z+4)(3z+2)}{(z+2)} = \frac{2(z+2)(3z+2)}{z+2} = 2(3z+2)$ avec $z \neq -2$

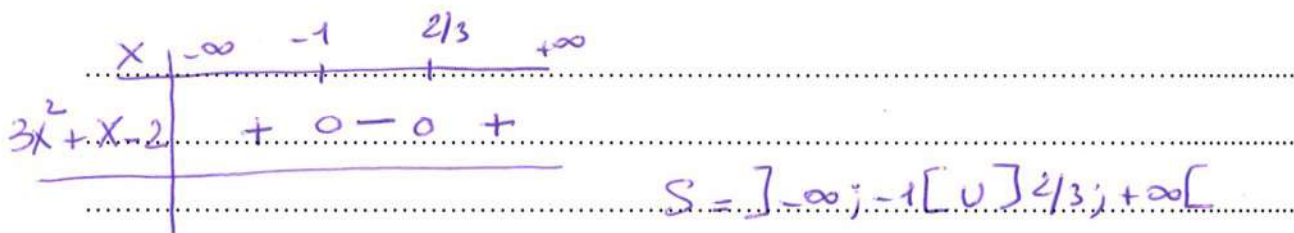
Question 5 Résolvez les équations et inéquations suivantes :

a) $9R - 3 = -2 + 2R \Leftrightarrow 9R - 2R = -2 + 3 \Leftrightarrow 7R = 1 \Leftrightarrow R = 1/7$
 $S = \{1/7\}$

b) $3X^2 + X - 2 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25 > 0$
 $X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
 $X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{6} = \frac{-6}{6} = -1$
 $S = \{-1, 2/3\}$

c) $5 - 3t \leq -2t + 4 \Leftrightarrow -3t + 2t \leq 4 - 5 \Leftrightarrow -t \leq -1 \Leftrightarrow t \geq 1$
 $S = [1; +\infty[$

d) $3X^2 + X - 2 > 0$ (Reprendre les résultats de l'équation b))



Question 6 Trigonométrie

1/11

a) Complétez les formules suivantes :

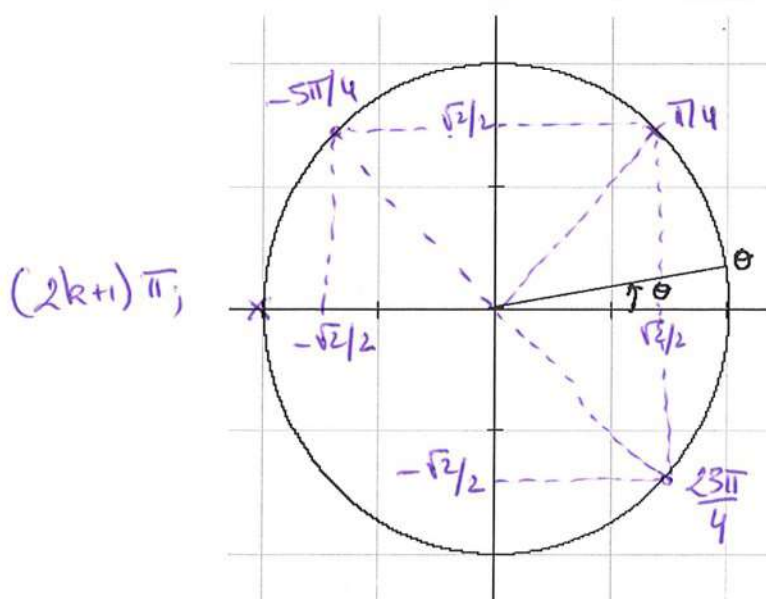
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

b) Complétez le cercle trigonométrique ci-dessous, placez sur ce dernier les angles suivants : $\frac{\pi}{4}$;

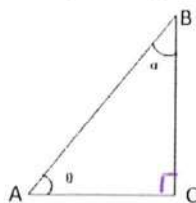
$-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$; $(2k+1)\pi$ où k est un entier relatif ; puis complétez le tableau ci-dessous :

θ	$(2k+1)\pi$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{23\pi}{4}$
$\sin \theta$	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$\cos \theta$	-1	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\tan \theta$	0	1	-1	-1



$$\frac{23\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 6\pi - \frac{\pi}{4}$$

- c) Soit ABC le triangle rectangle en C, tel que l'angle $\theta = \widehat{CAB}$ vaut $\frac{\pi}{6}$ radians et $AC = \sqrt{3}$



En déduire les valeurs de AB, puis de CB :

$$\underline{AB?} \quad \cos \theta = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{AC}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$$

$$\underline{CB?} \quad CB^2 + AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow CB^2 = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1 \quad CB > 0 \Leftrightarrow CB = 1$$

$$\text{ou bien : } \sin \theta = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow BC = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

La valeur de l'angle $\theta = \widehat{CAB}$ en degré est : $\frac{180}{6} = 30^\circ$

La valeur de l'angle $\alpha = \widehat{CBA}$ en degré est : $\alpha = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$

Question 7 Etude de fonctions

(16)

Soit f , la fonction définie par : $f(x) = \tan x$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

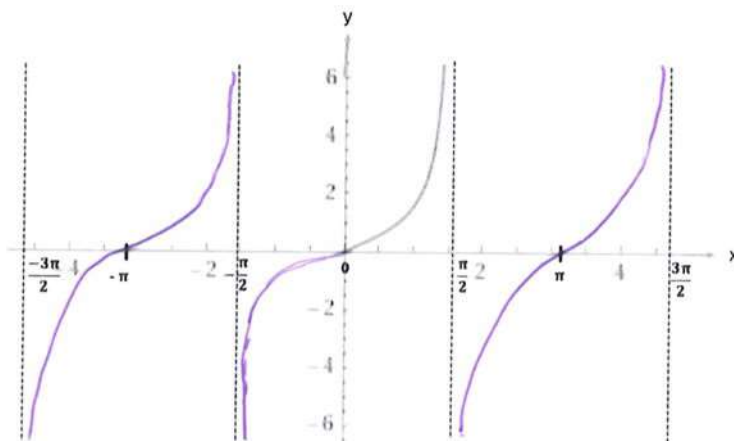
b) La fonction f est-elle paire ? impaire ? $\text{impaire car } \tan(-x) = -\tan(x)$

c) La fonction f est périodique, quelle est sa période ? $T = \pi$ car $\tan(x + \pi) = \tan x$

d) La fonction f a pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, quel est alors le sens de variation de f ?

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad \text{f est donc croissante.}$$

e) La fonction f est représentée ci-dessous sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Complétez la courbe sur le reste du schéma ci-dessous.



f) Que peut-on dire des droites d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{-3\pi}{2}$; $x = \frac{-\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$?

C'est des asymptotes.

Question 8 Exponentielle et Logarithme

(15)

Soit Log, la fonction « logarithme décimal » définie par : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \forall x > 0$. Déterminez et simplifiez :

$$\log(1) = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0 \quad \log(10) = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$$

$$\log(10^2) = \frac{\ln 10^2}{\ln 10} = 2 \frac{\ln 10}{\ln 10} = 2 \quad \log(10000) = \frac{\ln 10^4}{\ln 10} = 4 \frac{\ln 10}{\ln 10} = 4$$

$$\log(10^n) = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = n \frac{\ln 10}{\ln 10} = n \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Question 9 Equation de droites

(13)

1) Complétez :

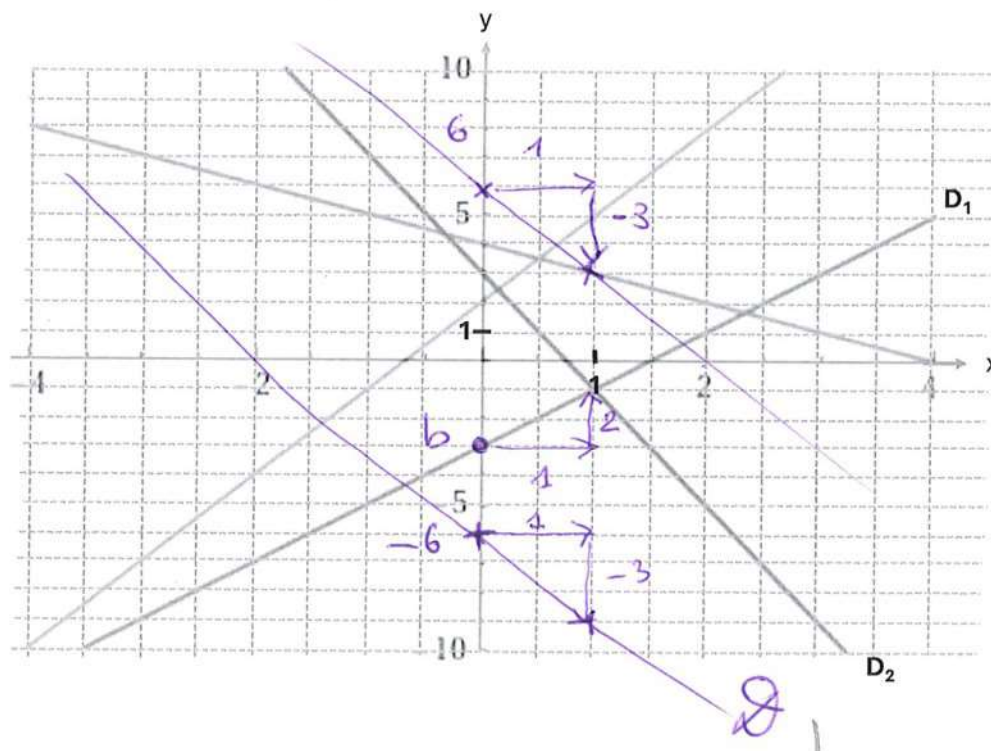
La droite D_1 tracée ci-dessous a pour équation : $D_1 : y = ax + b$

$b = -3$, par lecture graphique, est l'ordonnée à l'origine

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$D_1 : y = 2x - 3$$

2) Tracez sur la même figure ci-dessous, la droite d'équation : $D : y = -3x - 6$



Question 10 Résolvez le système suivant : $\begin{cases} 10x - 2y = 9 \\ -8x + y = -1 \end{cases}$ $\begin{array}{l|l} \times 4 & \times 1 \\ \hline \times 5 & \times 2 \end{array}$

(12)

$$\begin{array}{l} \textcircled{+} \left\{ \begin{array}{l} 40x - 8y = 36 \\ -40x + 5y = -5 \end{array} \right. \textcircled{+} \end{array}$$

$$\textcircled{+} \left\{ \begin{array}{l} 10x - 2y = 9 \\ -16x + 2y = -2 \end{array} \right. \textcircled{+}$$

$$\begin{array}{l} -3y = 31 \\ y = -\frac{31}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -6x = 7 \\ x = -\frac{7}{6} \end{array}$$

$$S = \left\{ -\frac{7}{6}, -\frac{31}{3} \right\} \quad 2$$

Question 11 Proportionnalité ?

(13)

Sur la notice d'un capteur de pression, on peut lire quelques valeurs repères :

Pression en hecto Pascal	Tension de sortie en Volt
P = 0 hPa	U _s = 4 V
P = 1000 hPa	U _s = 2 V
P = 1250 hPa	U _s = 1.5 V

(A)

(B)

(C)

a) Complétez ce tableau, on pourra expliquer succinctement les calculs ci-dessous :

Pet U_s ne sont pas proportionnels, sinon à P=0 correspondait U_s=0.

Les variations ΔP et ΔU_s sont proportionnelles :

$$\frac{U_B - U_A}{P_B - P_A} = \frac{U - U_A}{P - P_A} \Leftrightarrow \frac{-2}{1000} = \frac{U - 4}{1250}$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{-2}{1000} \times 1250 + 4 = -\frac{2500}{1000} + 4 = -2.5 + 4 = 1.5$$

$$U = 4 - 2.5 = 1.5$$

b) Déterminez l'expression de la tension de sortie U_s en fonction de la pression P (sauf si vous l'avez déjà fait dans la question précédente) :

$$\frac{-2}{1000} = \frac{U - 4}{P} \Leftrightarrow U = -\frac{2}{1000} P + 4$$

Question 12 ne compte pas dans la note finale (poursuites d'études).

- 1) Résoudre l'équation : $2 \cdot e^{2x} - e^x - 3 = 0$
- 2) Calculer les valeur moyenne et efficace du signal $f(t) = 5 \cdot \sin(3t)$. On rappelle les formules :

La **valeur moyenne** d'une fonction intégrable et T -périodique f , est la valeur donnée par : $\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$ où a est un nombre réel quelconque. La **valeur efficace** de f est la racine carré de la valeur moyenne de f^2 :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt}$$

[illegible]