

Notes

DM4

Exercices guidés

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes : (cela signifie qu'il faut trouver toutes les solutions de chacune de ces équations)

1) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = -1$

2) $4 \cdot \cos^2(x) + (2 - 2\sqrt{3}) \cdot \cos(x) - \sqrt{3} = 0$

3) $\cos(2x) - 4\sin(x) + 3 = 0$

③ $\cos(2x) - 4\sin x + 3 = 0 \quad (E)$

Compléter la résolution :

• $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

• Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\sin^2 x$.

Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Alors $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $\cos(2x) = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

On obtient $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

Notes

- Remplacer dans (E) $\cos(2x)$ par $1 - 2\sin^2 x$, puis simplifier

$$(E) \Leftrightarrow \cos(2x) - 4\sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 4\sin x + 4 = 0$$

L'équation (E) devient alors : $-2\sin^2 x - 4\sin x + 4 = 0$. Que l'on peut écrire aussi : $2\sin^2 x + 4\sin x - 4 = 0$. (E)

- Poser $X = \sin x$ et résoudre l'équation (E)

$$(E) \Leftrightarrow 2X^2 + 4X - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12 > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{4 \times 3}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} \\ X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Notes

• On trouve : $x_1 = -1 + \sqrt{3}$ et $x_2 = -1 - \sqrt{3}$

(peu importe l'ordre
 x_1 et x_2)

La résolution n'est pas terminée : ne pas oublier

qu'on a posé $x = \sin x$, on cherche x . On résout alors la
équations :

$$\sin x = -1 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sin x = -1 - \sqrt{3}$$

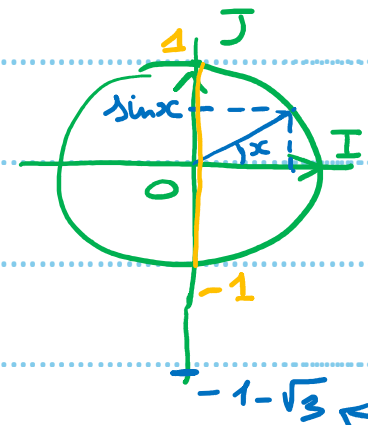
Or, on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x$

Comparer $-1 + \sqrt{3}$ avec -1 et 1 (à la
" $-1 - \sqrt{3}$ " " " Calculatrice)

$$-1 + \sqrt{3} \approx 0,7 \quad \text{donc} \quad -1 \leq 0,7 \leq 1$$

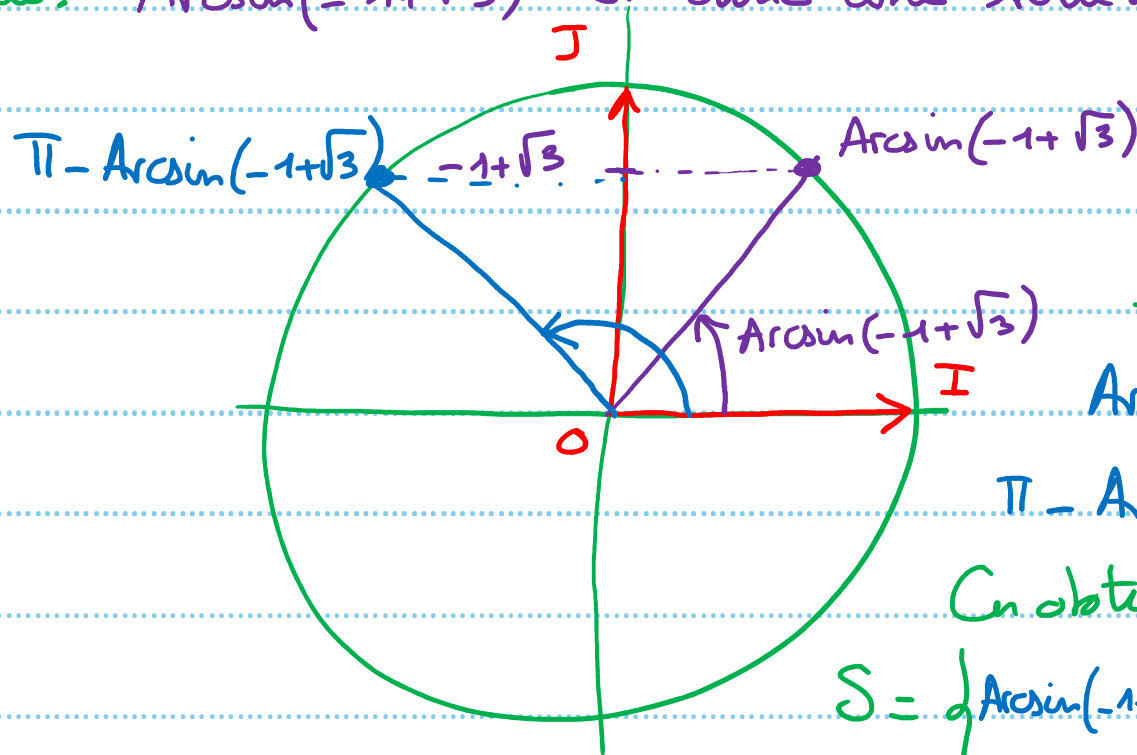
$$-1 - \sqrt{3} \leq -1 \quad \text{donc l'équation} \quad \sin x = -1 - \sqrt{3} \quad \text{n'a pas de solution}$$

On ne doit donc résoudre que l'équation $\sin x = -1 + \sqrt{3}$



Notes

• Résolution de $\sin x = -1 + \sqrt{3}$ ← il ne s'agit pas d'une valeur remarquable de sinus. On utilise donc la fonction réciproque de sinus : Arcsinus. $\text{Arcsin}(-1 + \sqrt{3})$ est donc une solution de l'équation $\sin x = -1 + \sqrt{3}$.



Dessignons et représentons sur le cercle les autres solu-

-tions :

$$\text{Arcsin}(-1 + \sqrt{3}) + 2k\pi$$

$$\pi - \text{Arcsin}(-1 + \sqrt{3}) + 2k\pi$$

On obtient alors :

$$S = \left\{ \text{Arcsin}(-1 + \sqrt{3}) + 2k\pi ; \pi - \text{Arcsin}(-1 + \sqrt{3}) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 6 Application de linéarisation (transformation d'un produit en somme)

Page 30 Chapitre 1

- 1) Déterminer la valeur moyenne et la valeur efficace U_{eff} d'une tension sinusoïdale u définie par $u(t) = 3 \cdot \cos(2t + \frac{\pi}{5})$ (Voir définitions bas de la page 27).
- 2) Quelle est la valeur moyenne de la fonction f , définie par : $f(t) = 10 + 5 \sin(3t + \frac{\pi}{3})$
- ③ Linéariser $\cos(x) \cdot \cos(2x)$, puis en déduire la valeur de : $J = \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cdot \cos(2x) dx$ ← changement d'énoncé

③ Pour linéariser $\cos x \cdot \cos(2x)$, on part de deux formules (celles à connaître par cœur) contenant $\cos a \cdot \cos b$, puis on les additionne membre à membre :

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \cos a \cdot \cos b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

Notes On obtient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$, d'où la formule de linéarisation : $\underbrace{\cos a}_{\text{produit}} \times \underbrace{\cos b}_{\text{somme}} = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

On en déduit la linéarisation de

$$\cos^a x \times \cos^b(2x) = \frac{1}{2} (\cos(x+2x) + \cos(x-2x))$$

après simplification : $\cos x \cdot \cos(2x) = \frac{1}{2} (\cos(3x) + \underbrace{\cos(-x)}_{= \cos x \text{ car } \cos \text{ est paire}})$

On peut alors calculer :

$$J = \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos(2x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos(3x) + \cos x) dx$$

On voit la constante de $\int$: $J = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} (\cos(3x) + \cos x) dx$ —

Notes

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin(3x)}{3} + \sin x \right]_0^{\pi/2}$$

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3}}_{=-1} + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} - \left(\frac{\sin 0}{3} + \sin 0 \right) \right)$$

Borne du haut ⊖ Borne du bas

et on obtient : $\bar{J} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1 \times 3}{3} \right)$

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$\bar{J} = \frac{1}{3}$$

① Simplifier:

$$Z_1 = (3+j)(4-j) ; Z_2 = (2+3j)^2 ; Z_3 = j^3 - 2j + j^2 - 4j^4 + 8j^3$$

$$Z_4 = \frac{5-j}{2+3j} ; Z_5 = \frac{1}{j}$$

② Déterminer $\text{Re}(Z)$; $\text{Im}(Z)$ et le placer dans le plan complexe.

$$Z_1 = 3-4j ; Z_2 = j\sqrt{2} - \sqrt{3} ; Z_3 = -2j ; Z_4 = 1-17j$$

$$Z_5 = -3+5j$$

① Simplifier:

$$j^2 = -1 \Leftrightarrow j^3 = -j \Leftrightarrow j^4 = -j^2 = 1$$

$$Z_1 = (3+j)(4-j) ; Z_2 = (2+3j)^2 ; Z_3 = j^3 - 2j + j^2 - 4j^4 + 8j^3$$

$$Z_4 = \frac{5-j}{2+3j} ; Z_5 = \frac{1}{j} \times \frac{-j}{-j} = \frac{-j}{-j^2} = -j$$

② Déterminer $\text{Re}(Z)$; $\text{Im}(Z)$ et le placer dans le plan complexe.

$$Z_1 = 3-4j ; Z_2 = j\sqrt{2} - \sqrt{3} ; Z_3 = -2j ; Z_4 = 1-7j$$

$$Z_5 = -3+5j$$

$$Z_2 = 4 + 2 \times 2 \times 3j + (3j)^2 = 4 + 12j - 9$$

$$\textcircled{1} Z_1 = 13+j ; Z_2 = -5+12j ; Z_3 = -5-11j ; Z_4 = \frac{7-17j}{13} ; Z_5 = -j$$

$$Z_4 = \frac{5-j}{2+3j} \times \frac{2-3j}{2-3j} = \frac{10-15j-2j+3j^2}{2^2-(3j)^2} = \frac{7-17j}{13}$$