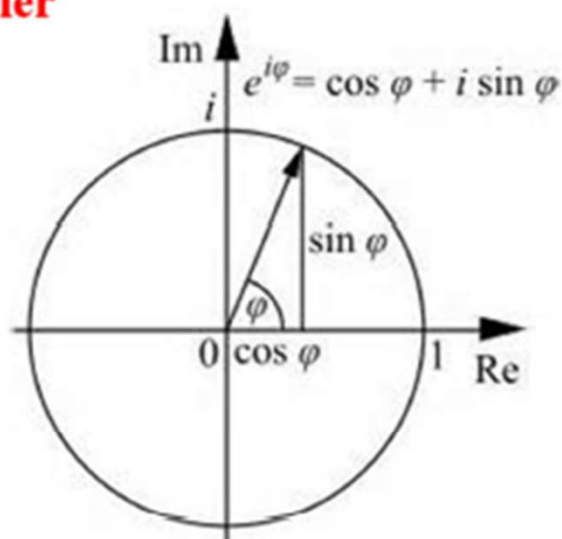


Chapitre 2 : Les bases des nombres complexes pour le GEII



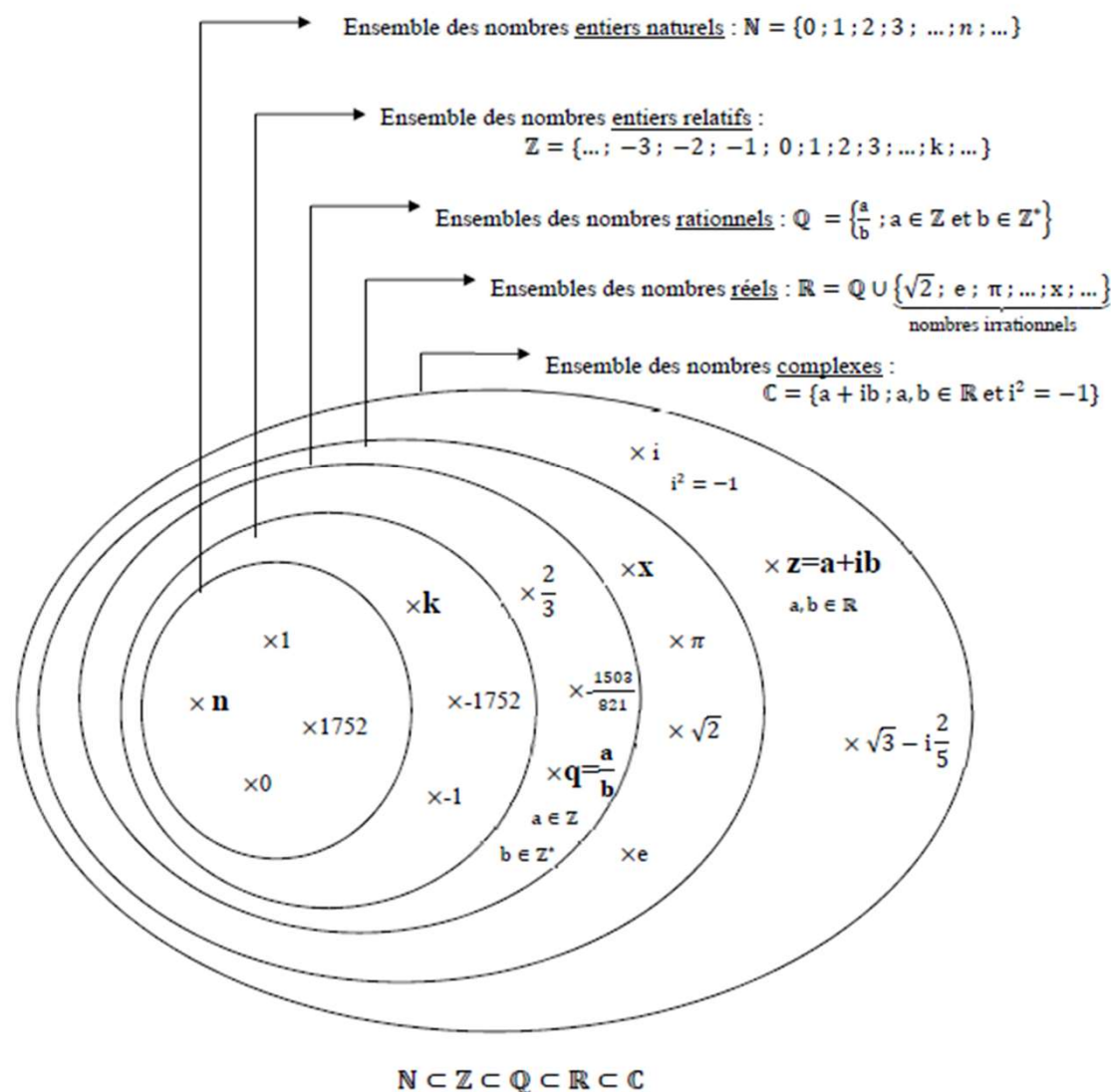
Leonhard Euler



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

I. Introduction

Page 5 chapitre 2



Notes Résoudre $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Déf: On note i et on appelle nombre imaginaire, le nombre qui élevé au carré donne -1 :

$i^2 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 = i^2 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$ $S_{\mathbb{C}} = \{-i; i\}$

Résoudre $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

$\Leftrightarrow x^2 = i^2 \cdot 2^2 = (2i)^2$

$\Leftrightarrow x = 2i$ ou $x = -2i$ $S_{\mathbb{C}} = \{\pm 2i\}$

Résoudre $x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 = i^2 \cdot 4^2 = (4i)^2$ donc $\sqrt{\Delta} = 4i$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4i}{2} = \frac{2(-1 + 2i)}{2} = -1 + 2i \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i \end{cases}$$

$S_{\mathbb{C}} = \{-1 + 2i; -1 - 2i\}$

ensemble des nombres complexes $\rightarrow \mathbb{C} = \{a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
"inclus dans"

Notes Résoudre $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Déf: Soit i , le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$

$$\Leftrightarrow x^2 = (i)^2 \Leftrightarrow x = i \text{ ou } -i \quad S_{\mathbb{C}} = \{-i; i\}$$

$$\text{Résoudre } x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = i^2 \cdot 2^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2i \text{ ou } -2i \quad S_{\mathbb{C}} = \{-2i; 2i\}$$

$$\text{Résoudre } x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0 \quad \Delta = -16 = \left(\frac{4i}{\sqrt{\Delta}}\right)^2$$

$\Delta < 0$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4i}{2} = \frac{2(-1 - 2i)}{2} = -1 - 2i \\ x_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-1 - 2i; -1 + 2i\}$$

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$

Ensemble des nombres entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots; k; \dots\}$$

Ensembles des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres réels : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}; e; \pi; \dots; x; \dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

$$\begin{aligned} &\times i \\ &i^2 = -1 \end{aligned}$$

On appelle i le nombre imaginaire, défini par $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{z = a + ib ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

Dans cet ensemble toute équation du second degré possède deux solutions.

En électricité la lettre i étant réservée à l'intensité d'un courant, nous la remplacerons par la lettre j .

Pour résoudre $az^2 + bz + c = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$,
on a 2 solutions suivantes : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

inclus dans.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Notes

Simplifier dans $\mathbb{C}$:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$(3-4i) \times (1+i) = 3 + 3i - 4i - \underbrace{4i^2}_{+4} = 7-i$$

$$1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$$

$$\text{car } i^3 = i \times i^2 = -i$$

$$(1+2i)^2 + (2-i)^2 = 1^2 + 2 \times 2i + \underbrace{(2i)^2}_{2^2 \cdot i^2} + 2^2 - 2 \times 2i + i^2 = 1 + 4i - 4 + 4 - 4i - 1 = 0$$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ $A=2 \quad B=i$

$$(3-4i) \times (3+4i) = \frac{3^2 - (4i)^2}{4^2 \cdot i^2} = 9 + 16 = 25$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \quad \text{ici } A=3 \text{ et } B=4i$$

$$\frac{2+i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6+8i+3i+4i^2}{25} = \frac{6-4+11i}{25} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$$

Notations Maths

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a+ib ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Notations du GEII.

$$\mathbb{C} = \left\{ \underline{z} = a+jb ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{j^2 = -1}$$

Notes

Simplifier dans $\mathbb{C}$:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Page 4 chapitre 2
page 24

$$(3-4i) \cdot (1+i) = 3 + 3i - 4i - 4i^2 = 3 - i + 4 = 7 - i$$

$$1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$$

$$i^3 = i \cdot \underbrace{i^2}_{-1} = -i$$

$$(1+2i)^2 + (2-i)^2 = 1 + 4i + (2i)^2 + 4 - 4i + i^2 = 0$$

$$(3-4i) \cdot (3+4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\frac{2+i}{3-4i} = \frac{2+i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6+8i+3i+4i^2}{25} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25} + i \frac{11}{25}$$

Notations Maths

$$\mathbb{C} = \{z = a+ib; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Notations du Gén.

$$\mathbb{C} = \{z = a+jb; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{j^2 = -1}$$

II. Définitions et notations du GEII

Page 7 chapitre 2

✓ Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :

$$\underline{Z} = x + j \cdot y \quad \text{où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{Re}(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathcal{Im}(\underline{Z})$

Notes

$$z_1 = 3 + 5j$$

$$\operatorname{Re}(z_1) = 3$$

$$\operatorname{Im}(z_1) = 5$$

$$z_2 = 5 + 0j$$

$$\operatorname{Re}(z_2) = 5$$

$$\operatorname{Im}(z_2) = 0$$

$$z_3 = j - 1 = -1 + j$$

$$\operatorname{Re}(z_3) = -1$$

$$\operatorname{Im}(z_3) = 1$$

$$z_4 = 0 - 3j$$

$$\operatorname{Re}(z_4) = 0$$

$$\operatorname{Im}(z_4) = -3$$

est un imaginaire pur



Notes

$$Z_1 = 3 + 5j$$

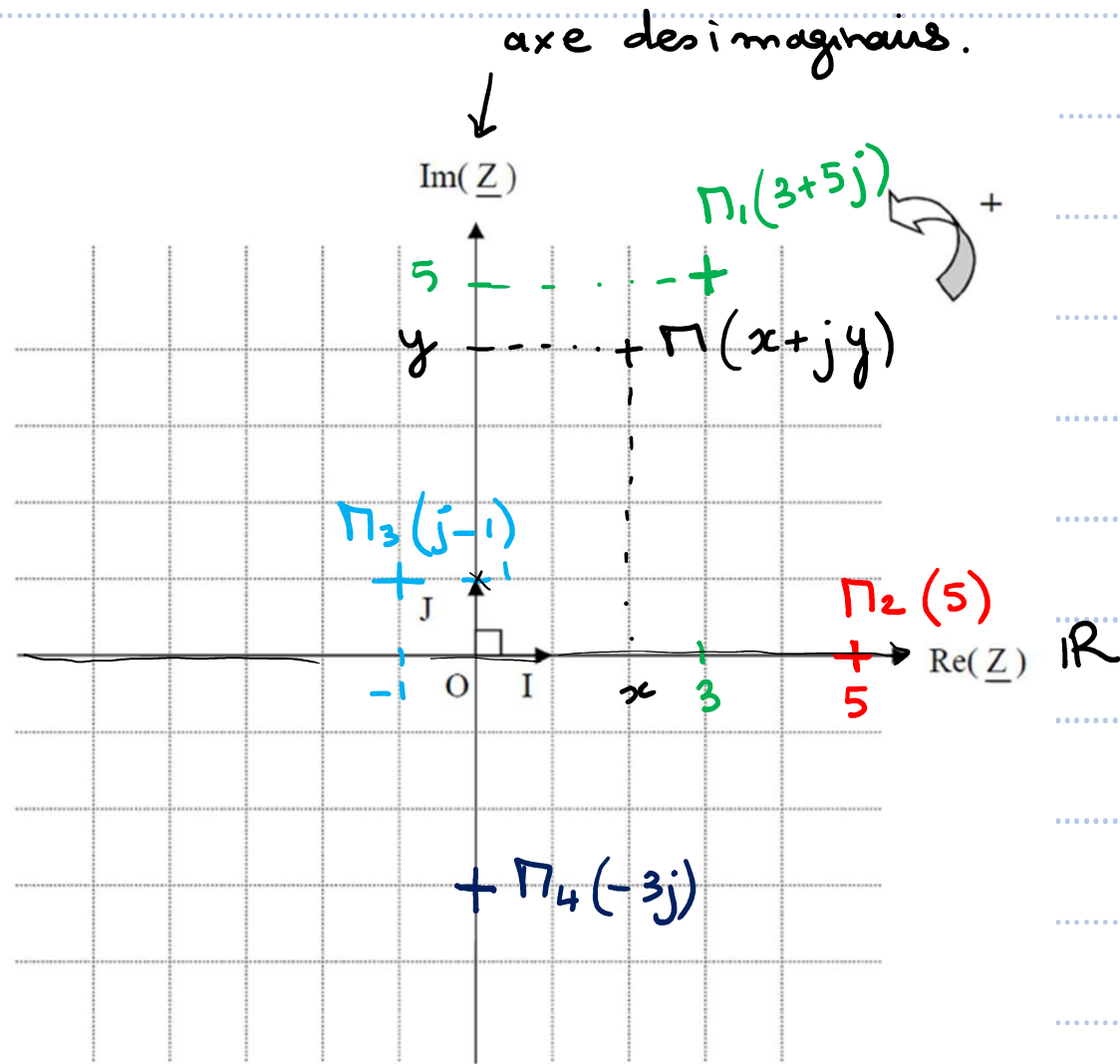
Π_1 est l'image de Z_1

$$Z_2 = 5$$

$$Z_3 = j - 1$$

$j - 1$ est l'affixe de Z_3

$$Z_4 = -3j$$



II. Définitions et notations du GEII

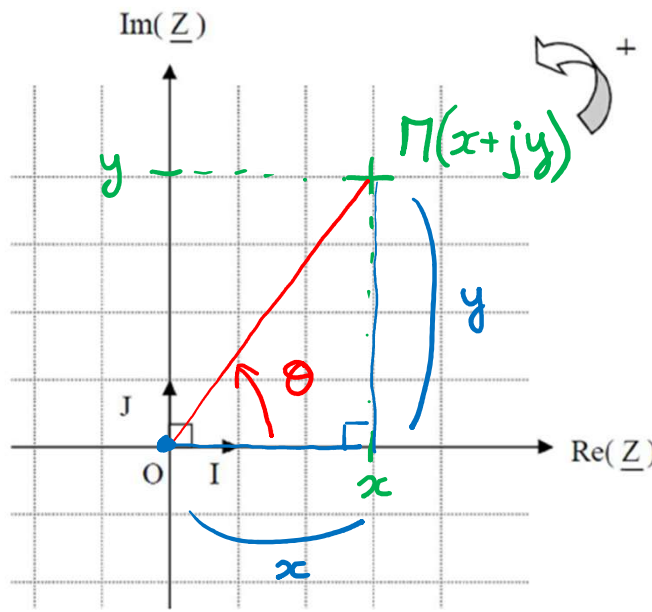
- ✓ Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
 On note : $x = \mathcal{Re}(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
 On note : $y = \mathcal{Im}(\underline{Z})$

- ✓ Le plan complexe : On représente un nombre réel sur une droite munie d'un repère $(O, \vec{OI})$. Tout nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ (où $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$) est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$ par le point M d'abscisse $x = \mathcal{Re}(\underline{Z})$ et d'ordonnée $y = \mathcal{Im}(\underline{Z})$.
 Le point $M(x,y)$ est appelé **image** de $\underline{Z}$.
 $\underline{Z}$ est **appelé l'affixe** du point M .
 $\underline{Z}$ est aussi appelé **l'affixe du vecteur** $\vec{OM} = x. \vec{i} + y. \vec{j}$



Calcul de $OM^2 = x^2 + y^2$ (th de Pythagore)

$OM = \sqrt{x^2 + y^2} \leftarrow \text{Module de } \underline{Z}$

Soit θ , la mesure de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\text{Adj}}{\text{Hyp}} = \frac{x}{OM} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{\text{Opp}}{\text{Hyp.}} = \frac{y}{OM} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

✓ Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, ainsi :

$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall \underline{Z} \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

✓ L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$,

on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{Z} = \frac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \frac{\text{Re}(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{Z} = \frac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Partie B : Les différentes écritures d'un nombre complexe

Page 9 chapitre 2

I. Définitions

$$\underline{Z} = x + j \cdot y \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \operatorname{Re}(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \operatorname{Im}(\underline{Z})$

Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M , donc $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

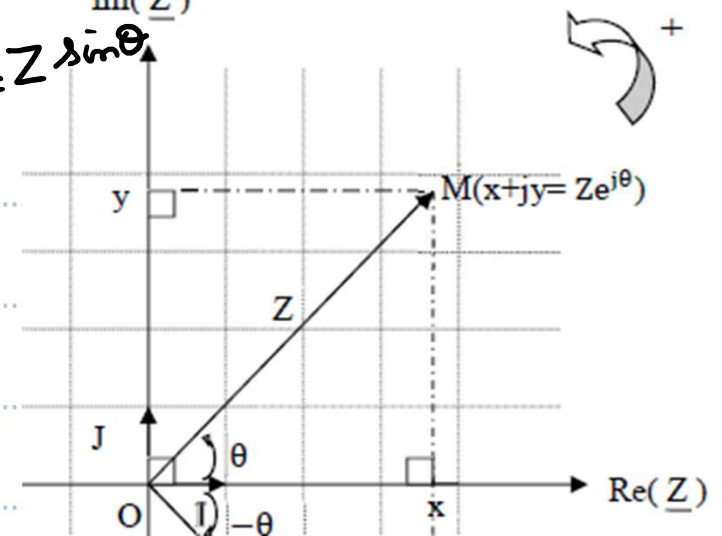
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{Z} = \frac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{Z} \Leftrightarrow x = Z \cos(\theta) \\ \sin(\theta) = \frac{y}{Z} = \frac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{Z} \Leftrightarrow y = Z \sin(\theta) \end{cases} \text{ si } Z \neq 0.$$

$$\underline{Z} = x + jy$$

$$= Z \cos \theta + j Z \sin \theta$$

$$= Z (\cos \theta + j \sin \theta) = [Z; \theta] \text{ GEI}$$

$$= Z \cdot e^{j\theta} \text{ EULER.}$$



Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$$\underline{Z} = x + j.y$$

Forme trigonométrique de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)

$$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta)) \text{ aussi noté : } \underline{Z} = [Z, \theta] \text{ écriture polaire}$$

Forme exponentielle, géométrique ou polaire : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$$\underline{Z} = Z.e^{j\theta}$$

Voir page 19

* écritures autres: $z_1 = z e^{j\theta} = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}] \leftarrow \text{polaire}$

Notes

$$z_1 = 1+j$$

$$\operatorname{Re}(z_1) = 1$$

$$\operatorname{Im}(z_1) = 1$$

module de z_1 : $z_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

argument de z_1 : $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 1+j\sqrt{3}$$

$$\operatorname{Re}(z_2) = 1$$

$$\operatorname{Im}(z_2) = \sqrt{3}$$

module de z_2 : $z_2 = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

argument de z_2 : $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

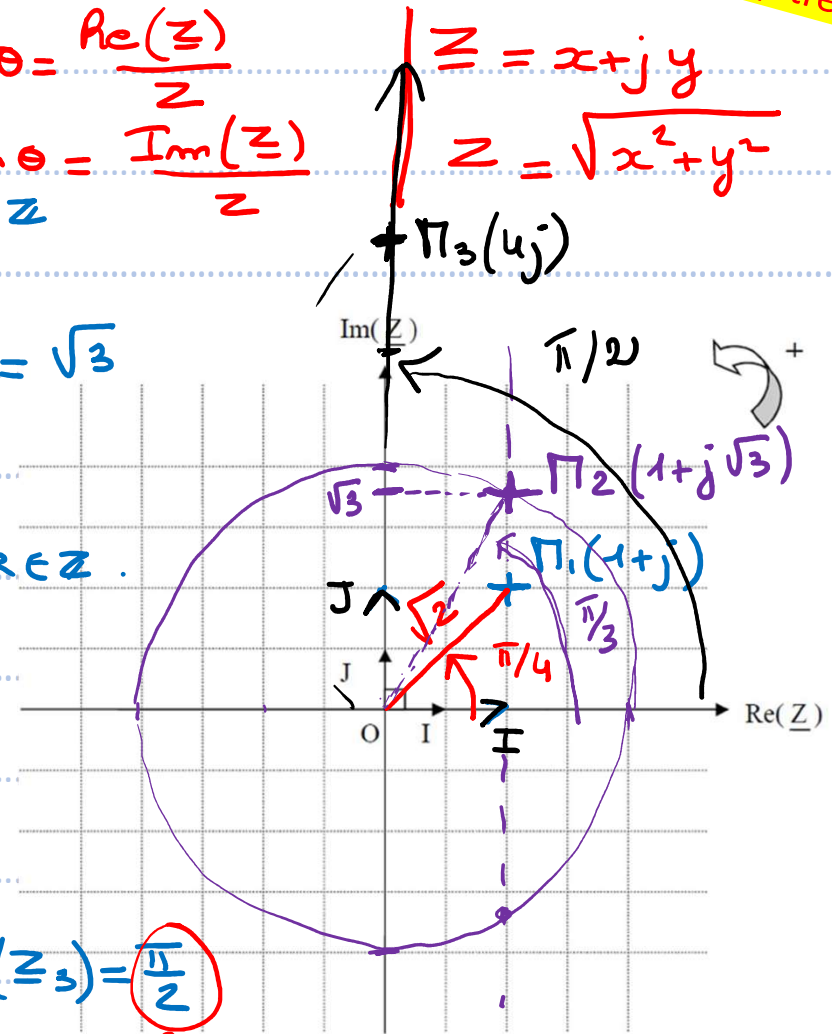
* $z_2 = 2e^{j\frac{\pi}{3}} = [2; \frac{\pi}{3}] = [2; 60^\circ]$ $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$

$$z_3 = 4j \quad \operatorname{Re}(z_3) = 0 \quad \operatorname{Im}(z_3) = 4$$

$$z_3 = \sqrt{0^2+4^2} = 4$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{0}{4} = 0 \\ \sin \theta = \frac{4}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \quad \arg(z_3) = \frac{\pi}{2}$$

* $z_3 = 4e^{j\frac{\pi}{2}} = [4; \frac{\pi}{2}] = [4; 90^\circ]$ Voir suite p. 119



Suite de la p. 8

Page 8&14 chapitre 2

Notes $Z_4 = 3 + 5j$ $\text{Re}(Z_4) = 3 > 0$ $\text{Im}(Z_4) = 5$

$$Z_4 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \sin \theta = \frac{5}{\sqrt{34}} \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{5}{\sqrt{34}}}{\frac{3}{\sqrt{34}}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$\theta = \arctan\left(\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}\right)$

$$Z_4 = [\sqrt{34}; \arctan\left(\frac{5}{3}\right)]$$

$$Z_4 \approx [\sqrt{34}; 1,03 \text{ rad}]$$

$Z_5 = 1 - j$ $\text{Re}(Z_5) = 1$; $\text{Im}(Z_5) = -1$

$Z_5 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\arg(Z_5) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$Z_5 = [\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}]$$

$$= \sqrt{2} e^{-j\pi/4}$$

cartésienne algébrique

$$Z_5 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 1 - j$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

