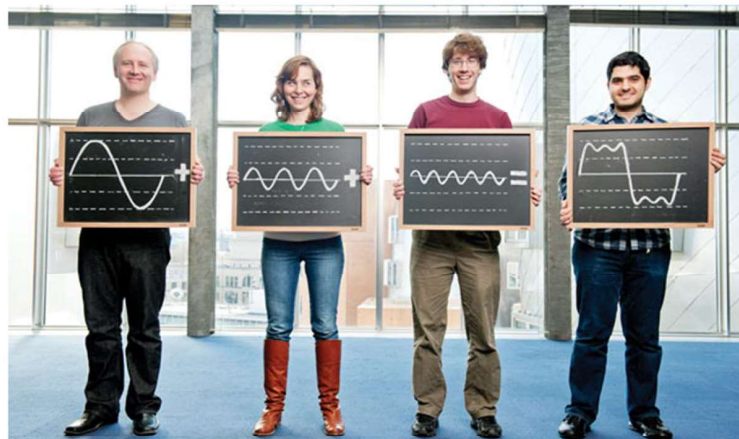


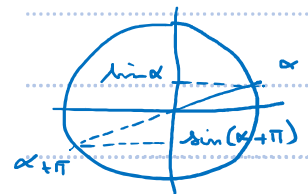
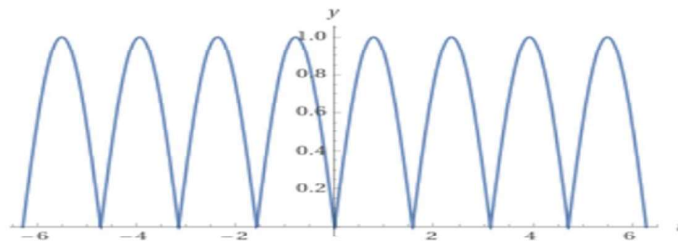
Correction du DS1 2APP

Chapitre 1 : Séries de Fourier – niveau 2



Exercice 1: Série de Fourier à coefficients réels (10 points)

Soit x , le signal défini par : $x(t) = |\sin(2t)|$, dont la représentation graphique est :



1) Montrer que x est un signal pair et périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

x est pair car la courbe est symétrique par rapport à l'axe y ou bien :

$$x(-t) = |\sin(-2t)| = |-\sin(2t)| = |\sin(2t)| = x(t)$$

x est $\frac{\pi}{2}$ -périodique car : $x\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right| = |\sin(2t + \pi)| = |-\sin 2t| = |\sin 2t|$
 $x\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

2) Calculer la valeur moyenne de x .

3) a. Montrer que : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos b$

b. Transformer alors en somme le produit $\sin(2t) \cdot \cos(4pt)$.

c. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \cdot \cos(4pt) \cdot dt = \frac{-1}{4p^2-1}$

$$2) a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)}_{\text{pair}} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x(t) dt = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} |\sin 2t| dt$$

Comme $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ alors $0 \leq 2t \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin(2t) \geq 0$ ainsi :

$$|\sin(2t)| = \sin(2t).$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin(2t) dt = \frac{4}{\pi} \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{2}{\pi}$$

$$3) a. \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cdot \cos b \Leftrightarrow \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

b. Transformer alors en somme le produit $\sin(2t) \cdot \cos(4pt)$.

c. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) \cdot \cos(4pt) \cdot dt = \frac{-0,5}{4p^2-1}$

b. En posant $a = 2t$ et $b = 4pt$, on obtient :

$$\sin(2t) \cdot \cos(4pt) = \frac{1}{2} \left(\sin(2t+4pt) + \sin(2t-4pt) \right)$$

c.

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) \cdot \cos(4pt) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin((2+4p)t) + \sin((2-4p)t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{-\cos((2+4p)t)}_0 \frac{1}{2+4p} - \underbrace{\cos((2-4p)t)}_0 \frac{1}{2-4p} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{-\cos\left(\frac{(2+4p)\pi}{2}\right)}_{\frac{2-4p}{2}} - \underbrace{\cos\left(\frac{(2-4p)\pi}{2}\right)}_{\frac{2+4p}{2}} + \frac{1}{2+4p} + \frac{1}{2-4p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+4p} + \frac{1}{2-4p} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+4p} + \frac{1}{2-4p} \right) = \frac{1}{2} \frac{2-4p+2+4p}{4-16p^2} \end{aligned}$$

b. Transformer alors en somme le produit $\sin(2t) \cdot \cos(4pt)$.

c. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) \cdot \cos(4pt) \cdot dt = \frac{-0,5}{4p^2-1}$

$$a_p = \frac{1}{2} \frac{4}{4-16p^2} = \frac{1}{2} \frac{4}{4(1-4p^2)} = \frac{-0,5}{4p^2-1} \quad (p \neq \pm 1/2 \text{ ou } p \in \mathbb{Z})$$

- 4) En utilisant le résultat de la question II.3.c calculer les coefficients de Fourier réels de x , puis donner le développement en série de Fourier de la fonction x .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4.$$

4) $a_0 = \frac{2}{\pi}$; $b_p = 0 \quad \forall p \geq 1$ car x est pair

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \cos(p\omega t) dt = \frac{4}{\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \underbrace{x(t) \cos(4pt)}_{\text{pair}} dt$$
$$= \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin(2t) \cos(4pt) dt$$

$$a_p = \frac{-4}{\pi(4p^2 - 1)} \quad \forall p \geq 1.$$

Donc:

$$S_x(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(4pt)}{4p^2 - 1}.$$

5) Appliquer le théorème de Dirichlet au signal x .

Hyp1: x est continue sur $[0; \pi/2[$

Hyp2: x est dérivable sur $[0; \pi/2[$ sauf en 0 où :

$$x'(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} (-\sin(2t))' = \lim_{t \rightarrow 0^-} (-2\cos(2t)) = -2$$

$$x'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sin(2t))' = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2\cos(2t)) = 2$$

} sont finis

Conclusion: la série de Fourier de x converge partout $t \in \mathbb{R}$ et :

$$S_x(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

6) Remplacer t par 0 dans la conclusion du théorème de Dirichlet. Qu'obtient-on ?

7) En remplaçant dans la conclusion du théorème de Dirichlet pour t par $\frac{\pi}{4}$, montrer

$$\text{que } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$6) S_x(0) = x(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$7) S_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

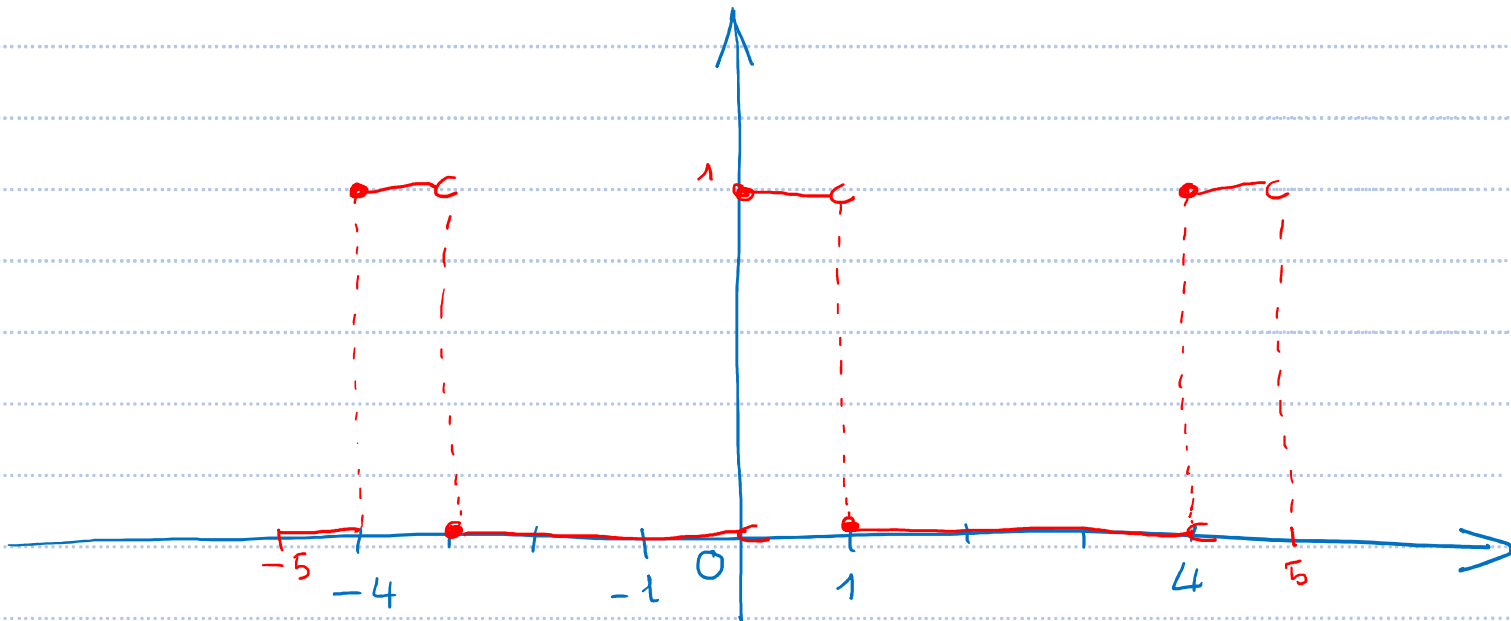
$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{p \geq 1} \frac{\cos(p\pi)}{4p^2-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} = \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2: Série de Fourier à coefficients complexes (10 points)

1) Soit x , la fonction numérique, de période 4, définie sur l'intervalle par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; 1[\\ 0 & \text{si } t \in [1, 4[\end{cases}$$

a. Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de x sur l'intervalle $[-4; 4]$.



b. Calculer les coefficients de Fourier **complexes** de x , puis en déduire sa valeur moyenne, ses coefficients de Fourier **réels**, ainsi que sa **série de Fourier réelle**.

c. Montrer que x est développable en série de Fourier (i.e : appliquer le théorème de Dirichlet).

$$b. C_p = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot e^{-jp\omega t} dt = \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 1 \cdot e^{-jp\frac{\pi}{2}t} dt + \frac{1}{4} \int_1^4 0 \cdot dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } p \neq 0 \quad C_p = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}pt}}{-jp\frac{\pi}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1 \times j}{2jp\pi} \left(e^{-j\frac{\pi}{2}p} - 1 \right)$$

$$\left\{ C_p = \frac{j}{2p\pi} \left(e^{-j\frac{\pi}{2}p} - 1 \right) \quad \forall p \neq 0 \right.$$

$$C_0 = \frac{1}{4} \int_0^1 dt = \frac{1}{4} = a_0$$

$$\text{Comme } C_p = \frac{a_p - jb_p}{2} \text{ alors } \begin{cases} a_p = 2 \operatorname{Re}(C_p) \\ b_p = -2 \operatorname{Im}(C_p) \end{cases}$$

$$C_p = \frac{j}{2p\pi} \left(e^{-j\frac{p\pi}{2}} - 1 \right) = \frac{j}{2p\pi} \left(\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1 - j \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \right)$$

$$C_p = \frac{1}{2p\pi} \left[\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) + j \left(\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 1 \right) \right]$$

ainsi:

$$\begin{cases} a_p = 2\operatorname{Re}(C_p) = \frac{1}{p\pi} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \text{ si } p \neq 0 \\ b_p = -2\operatorname{Im}(C_p) = \frac{1}{p\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \right) \end{cases}$$

Série de Fourier de x : $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \left[\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2}t\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{p\pi}{2}t\right) \right]$

C. Théorème de Dirichlet :

Hyp. 1 : x est continue sur $[0; 4[$ sauf en 0 et 1 où :

$x(0^-) = 0$; $x(0^+) = 1$; $x(1^-) = 1$ et $x(1^+)$ sont finies

Hyp 2 : x est dérivable sur $[0; 4[$ sauf en 0 et 1 où :

$x'(0^-) = x'(0^+) = x'(1^-) = x'(1^+) = 0$ sont finies

Conclusion : la série de Fourier de x converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et :

$$S_2(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \neq 4k \text{ et } t \neq 4k+1 \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

2) La valeur efficace du signal T-périodique x est donnée par la formule $(V_{eff})^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2(t) \cdot dt$

a. Calculer V_{eff} puis en donner une approximation décimale à 10^{-1} près.

b. La formule de Bessel-Parseval donne la valeur efficace du signal x en fonction de ses coefficients de Fourier : $(V_{eff})^2 = a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$

Dans la pratique on décide de ne conserver que les harmoniques de rang 1 à 3. On

obtient alors $V^2 = a_0^2 + \sum_{p=1}^3 \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$. Calculer V, puis en donner une approximation décimale à 10^{-1} près. Comparez V avec V_{eff} obtenu en 2)a. Cela justifie-t-il que dans la pratique on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 4 ?

2.a. $V_{eff}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^1 1^2 dt + \frac{1}{4} \int_1^4 0^2 dt = \frac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow V_{eff} = \sqrt{0,25} = 0,5$

2.b. $V^2 = a_0^2 + \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} + \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} + \frac{a_3^2 + b_3^2}{2}$ avec $\begin{cases} a_p = \frac{1}{\pi p} \sin(p \frac{\pi}{2}) \\ a_0 = 1/4 \\ b_p = \frac{1}{\pi p} (1 - \cos(p \frac{\pi}{2})) \end{cases}$

donc $a_1 = \frac{1}{\pi}; b_1 = \frac{1}{\pi}; a_2 = 0; b_2 = \frac{1}{\pi}; a_3 = -\frac{1}{3\pi}; b_3 = \frac{1}{3\pi}$

et $V^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{9\pi^2} \right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{2\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} = \frac{1}{16} + \frac{27+2}{18\pi^2} = \frac{1}{16} + \frac{29}{18\pi^2} \Rightarrow V \approx 0,5$