$$s'(t) + 3s(t) = 2e'(t) + e(t) \qquad s(0) = e(0) = 0.$$

On note $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$ et $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

$$\mathcal{L}[s'(t)] + 3.\mathcal{L}[s(t)] = 2.\mathcal{L}[e'(t)] + \mathcal{L}[e(t)].$$

$$p.S(p) - \cancel{s(0)}^{0} + 3.S(p) = 2\left(pE(p) - \cancel{e(0)}^{0}\right) + E(p)$$

$$pS(p) + 3.S(p) = 2pE(p) + E(p)$$

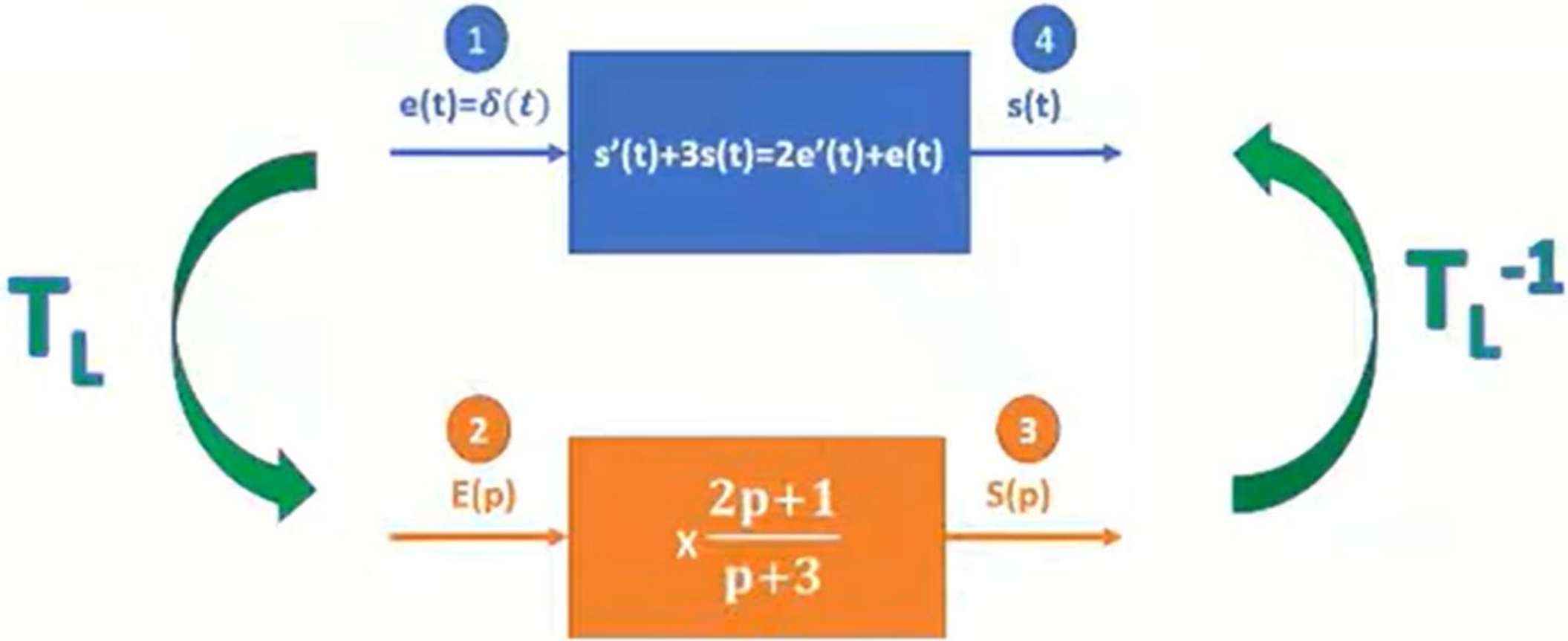
$$(p+3).S(p) = (2p+1).E(p)$$

$$S(p) = \frac{2p+1}{p+3}.E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p+1}{p+3}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p+1}{p+3}$$

✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.




$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{2p+1}{p+3}$$

Si $e(t) = \delta(t)$ alors $E(p) = 1$

et $S(p) = H(p) \times E(p)$

$$S(p) = \frac{2p+1}{p+3}$$

S est irréductible et a une partie entière : $A = 2p+1$ | $p+3 = B$

$-(2p+6)$ | $2 = Q$

$R = -5$

$$S = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

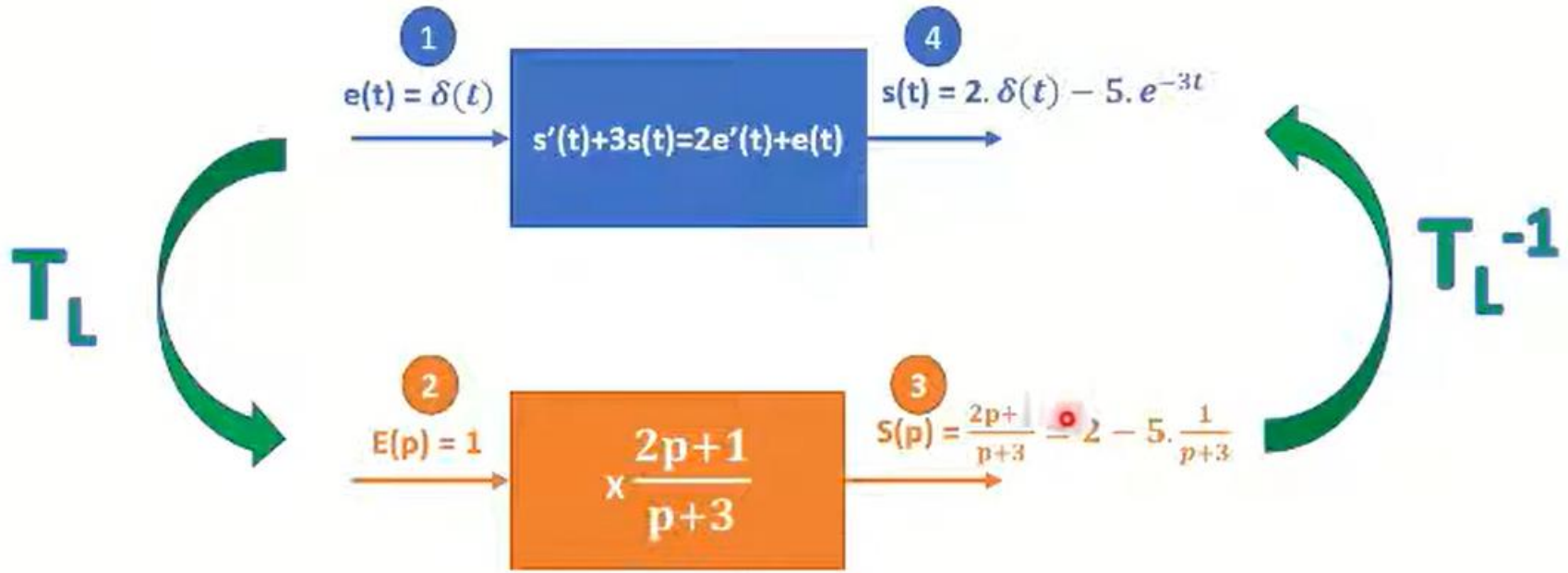
$$S(p) = 2 - \frac{5}{p+3}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ↓ ↓ $\mathcal{L}^{-1}$

$$s(t) = 2\mathcal{L}^{-1}[1] - 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right)$$

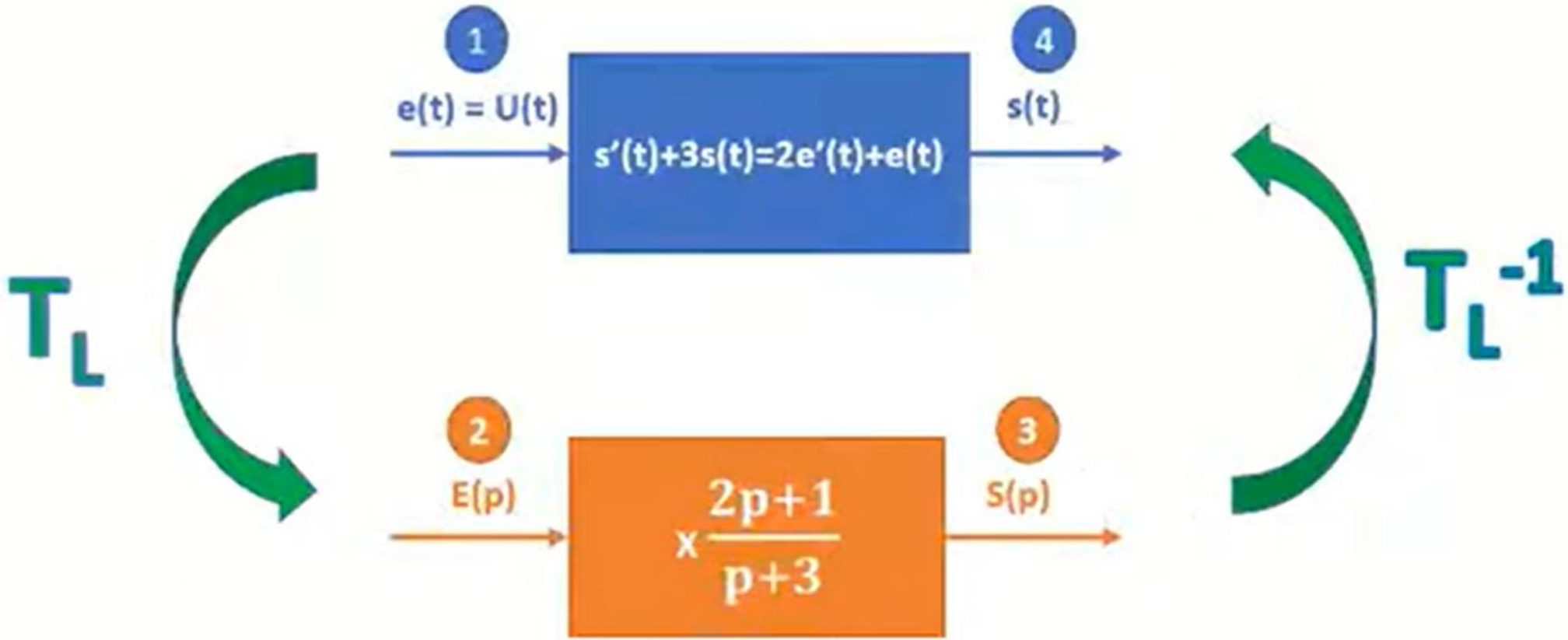
La réponse impulsionnelle : $s(t) = 2.\delta(t) - 5e^{-3t}.u(t)$

# réponse impulsionnelle




$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{2p+1}{p+3}$$

✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.




$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{2p+1}{p+3}$$

$e(t) = u(t)$ donc $E(p) = \frac{1}{p}$

alors $S(p) = E(p) \times H(p) = \frac{2p+1}{p(p+3)}$ est irréductible, sans partie entière

$$S(p) = \frac{2p+1}{p(p+3)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+3}$$

$$a = \left[ p\,S(p) \right]_{p=0} = \left[ \frac{2p+1}{p+3} \right]_{p=0} = \frac{1}{3}$$

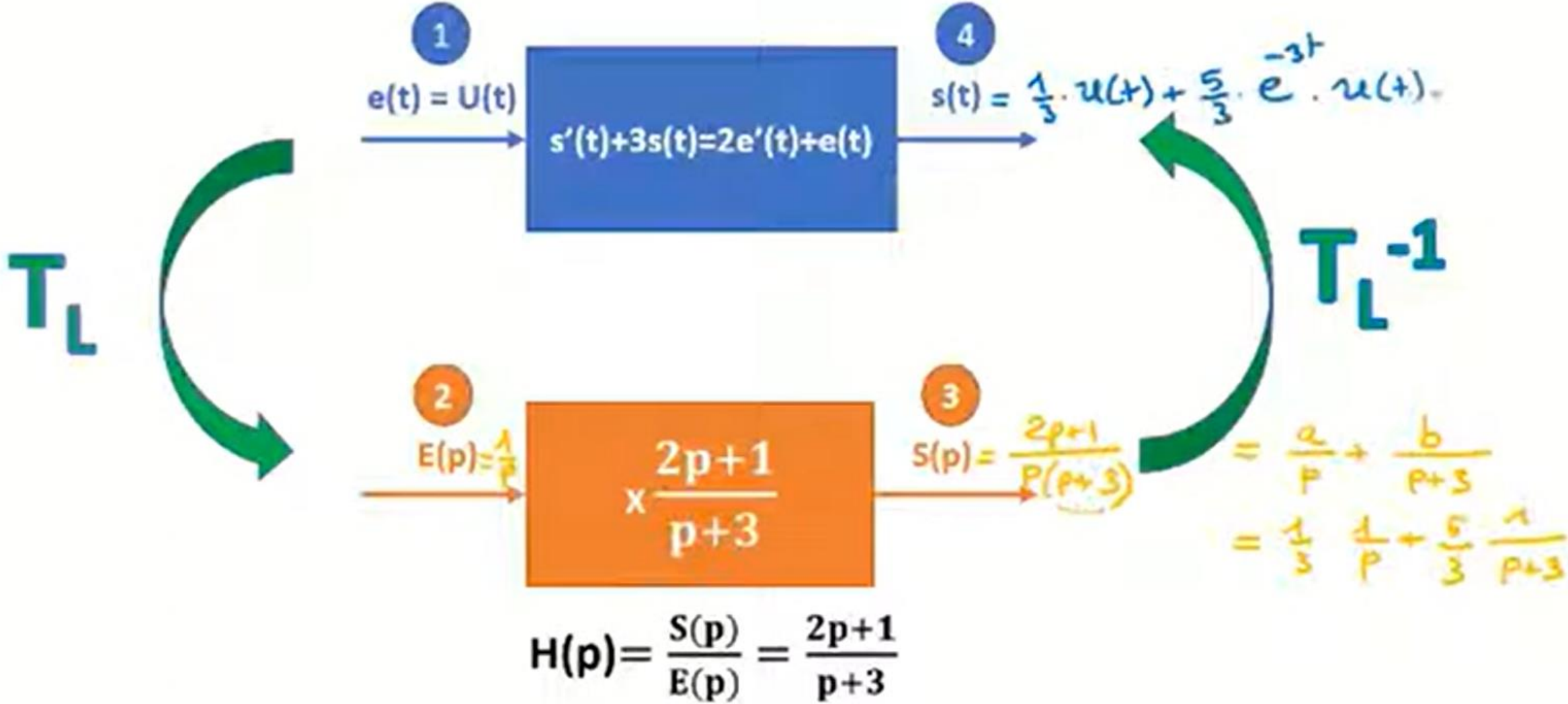
$$b = \left[ (p+3)\,S(p) \right]_{p=-3} = \left[ \frac{2p+1}{p} \right]_{p=-3} = 5/3$$

$$S(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{p+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \quad \right\} \mathcal{L}^{-1}$$

$$s(t) = \frac{1}{3} \cdot u(t) + \frac{5}{3} e^{-3t} \cdot u(t)$$

La réponse indicielle est donc : $s(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right) \cdot u(t)$


1
e(t) = U(t)
s'(t)+3s(t)=2e'(t)+e(t)
4
s(t) = 1/3 · u(t) + 5/3 · e^-3t · u(t)
T_L
T_L^-1
2
E(p)=1/p
x (2p+1)/(p+3)
3
S(p) = (2p+1)/(p(p+3))
= a/p + b/(p+3)
= 1/3 1/p + 5/3 1/(p+3)
H(p)= S(p)/E(p) = (2p+1)/(p+3)

✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).

Si $e(t) = 5\cos(3t)$ alors $E(p) = \frac{5p}{p^2+9}$ et $S(p) = H(p).E(p) = \frac{5p(2p+1)}{(p^2+9)(p+3)} = \frac{A}{B}$

DSES de S(p) : deg A < deg B donc pas de partie entière

$S(p) = \frac{ap+b}{p^2+9} + \frac{c}{p+3}$

Calcul de c : $c = [(p+3).S(p)]_{p=-3} = \left[\frac{5p(2p+1)}{p^2+9}\right]_{p=-3} = \frac{-15\times(-5)}{18}$

$c = \frac{25}{6}$

Calcul de a et b :

Méth 1 : $a\times 3j + b = [(p^2+9)S(p)]_{p=j} = \left[\frac{5p(2p+1)}{p+3}\right]_{p=3j}$

$3aj+b = \frac{15j(6j+1)}{3j+3} = \frac{5(-6+j)}{1+j} \times \frac{1-j}{1-j} = \frac{5(-5+7j)}{2}$

$3aj+b = -\frac{25}{2} + \frac{35}{2}j \iff b = -\frac{25}{2}$ et $a = \frac{35}{6}$

Méth 2 : ① $S(0) = 0 = \frac{b}{9} + \frac{c}{3} \iff b = -9\times\frac{c}{3} = -3c = -\frac{25}{2}$

② $\lim_{p\to+\infty} pS(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{10p^3}{p^3} = 10 = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{ap^2}{p^2} + \frac{cp}{p}\right)$

$\iff a + c = 10 \iff a = 10 - c = \frac{60-25}{6} = \frac{35}{6}$

Donc :

$S(p) = \frac{\frac{35}{6}p - \frac{25}{2}}{p^2+9} + \frac{\frac{25}{6}}{p+3} = \frac{35}{6}\frac{p}{p^2+9} - \frac{25}{6}\frac{3}{p^2+9} + \frac{25}{6}\frac{1}{p+3}$

$s(t) = \left(\frac{35}{6}\cos(3t) - \frac{25}{6}\sin(3t) + \frac{25}{6}e^{-3t}\right)\mathcal{U}(t)$

- ✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).
- ✓ Montrer qu'après disparition du régime transitoire, la réponse de ce circuit à $e(t) = 5\cos(3t)$ est de la forme : $s(t) = 5A\cos[3t + \varphi]$ avec :
  $A = |H(3j)|$ et $\varphi = \text{Arg}(H(3j))$ .

On a trouvé $s(t) = \frac{35}{6}\cos(3t) - \frac{25}{6}\sin(3t) + \frac{25}{6}e^{-3t}$ en "notation abusive"

$\frac{25}{6}e^{-3t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ très rapidement.

C'est le "régime transitoire"

C'est le "régime permanent" il nous intéresse davantage

Rappel : $a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$

Donc $A = \sqrt{\frac{35^2}{6^2} + \frac{25^2}{6^2}} = \frac{\sqrt{1850}}{6} = \frac{5\sqrt{74}}{6}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{25}{35}\right) = \arctan\left(\frac{5}{7}\right) \approx 0{,}62$ rad.

Le régime permanent de la sortie est donc : $\frac{5\sqrt{74}}{6}\cos\left(3t + \arctan\left(\frac{5}{7}\right)\right)$

Notes

Calculons $|H(3j)|$ et $\arg(H(3j))$

$$|H(3j)| = \left| \frac{2p+1}{p+3} \right|_{p=3j} = \left| \frac{6j+1}{3j+3} \right| = \frac{|6j+1|}{|3j+3|} = \frac{\sqrt{36+1}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{37}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{74}}{6}$$

et $\arg(H(3j)) = \arg\left(\frac{6j+1}{3j+3}\right) = \arg(1+6j) - \arg(3+3j) = \underbrace{\arctan(6) - \underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}}}_{= \arctan\left(\frac{5}{7}\right)} \simeq 0{,}62 \text{ rad}$ voir pourquoi en diapo 12.

Conclusion : Au lieu de s'enquiquiner avec la DSES qui est longue, on peut tout simplement calculer le régime permanent avec la formule suivante :

si $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$ alors $s(t)_{\text{permanent}} = e_0 A \cos(\omega t + \varphi)$ où $A = |H(j\omega)|$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$

C'est bien ce qu'on a trouvé ici :

$$e(t) = 5\cos(3t) \Rightarrow s_{\text{permanent}}(t) \simeq 5 \times \frac{\sqrt{74}}{6} \cdot \cos(3t + 0{,}62)$$

Notes

? $\arctan\left(\frac{5}{7}\right) = \arctan 6 - \arctan 1$ ?

Car : $\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a\cos b - \sin b\cos a}{\cos a\cos b + \sin a\sin b} = \frac{\cos b(\sin a - \tan b.\cos a)}{\cos b(\cos a + \sin a.\tan b)}$

$\tan(a-b) = \frac{\cos a(\tan a - \tan b)}{\cos a(1 + \tan a\tan b)}$ donc $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a.\tan b}$

$\tan\left(\underbrace{\arctan 6}_{a} - \underbrace{\arctan 1}_{b}\right) = \frac{\tan(\arctan 6) - \tan(\arctan 1)}{1+\tan(\arctan 6).\tan(\arctan 1)} = \frac{6-1}{1+6} = \frac{5}{7}$

$= \tan\left(\arctan\frac{5}{7}\right)$