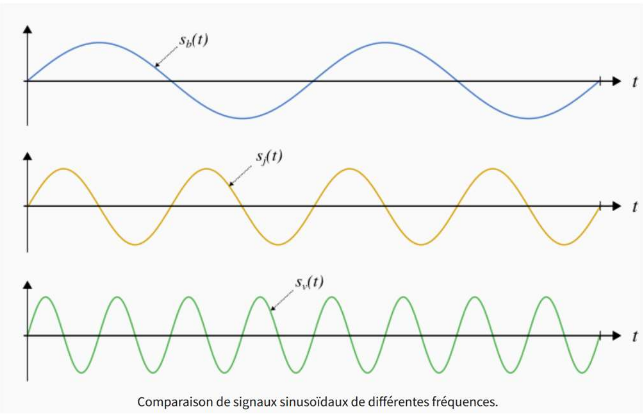
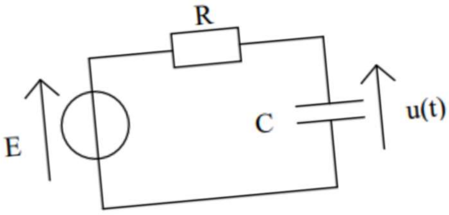
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R1-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

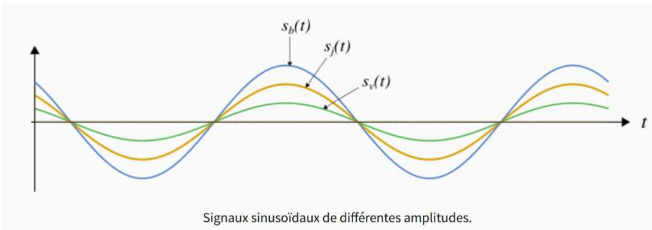
<u>Chapitre 1</u> : Programme du semestre 1 – Accès à moodle Calculs de base appliqués au GEII – Trigonométrie – EDLCC



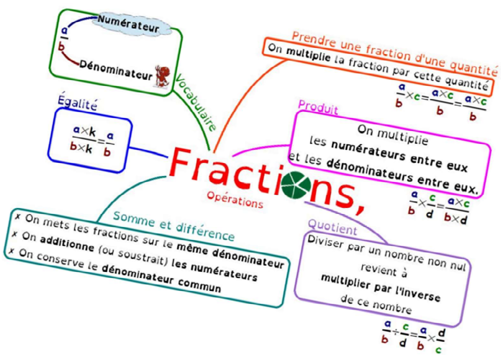
Comparaison de signaux sinusoïdaux de différentes fréquences.

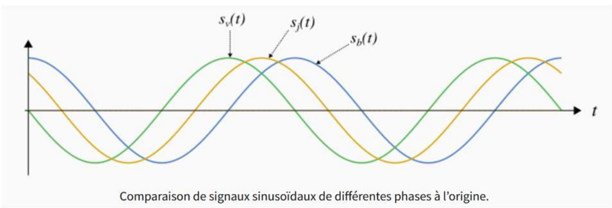


$$RCu' + u = E.$$



Signaux sinusoïdaux de différentes amplitudes.



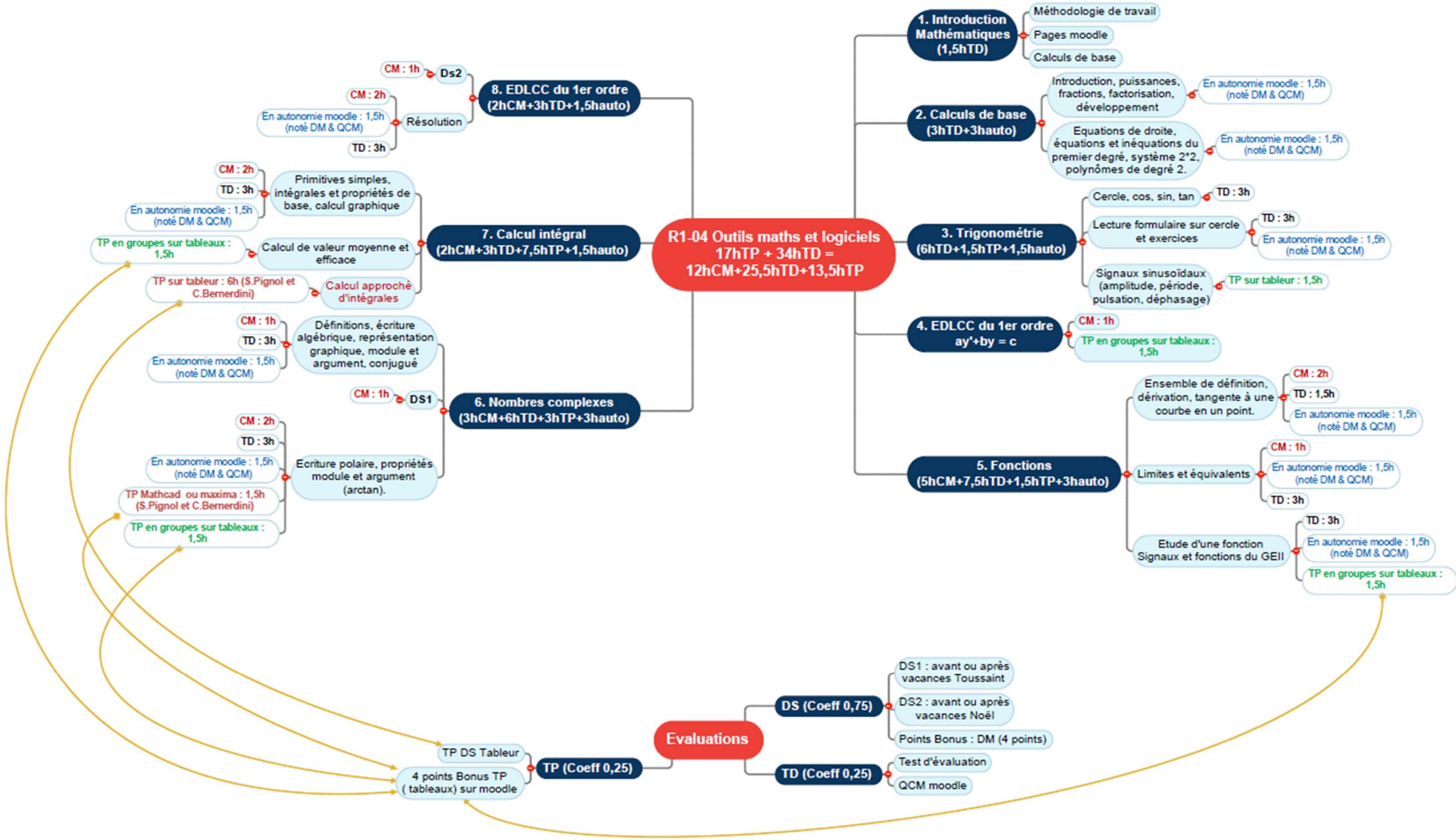


Comparaison de signaux sinusoïdaux de différentes phases à l'origine.

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Table des matières

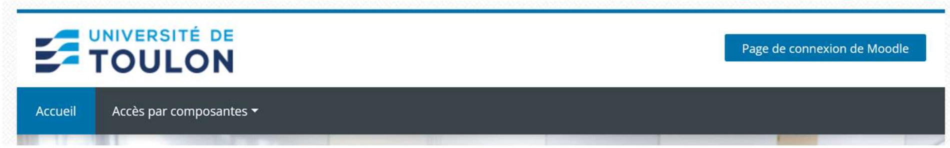
Programme du semestre 1 de l'année 2023 - 2024



Cette carte mentale, élaborée par le logiciel Mindview (gratuit pour les étudiants de l'université de Toulon), se lit dans le sens des aiguilles d'une montre.

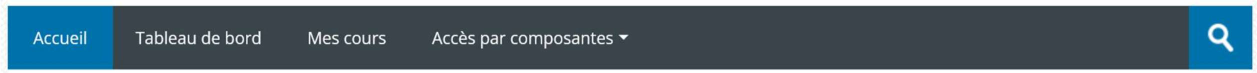
Tutoriel sur la plateforme numérique Moodle

1) Sur un moteur de recherche bien connu tapez « moodle univ tln », choisir le premier lien « Moodle – Université de Toulon »



2) A l'aide de vos identifiants (voir carte d'étudiant ou mail du secrétariat), connectez-vous (en haut à droite « Authentification Université de Toulon »)

3) Cliquez sur la rubrique sur le ruban noir, en haut « Mes cours »

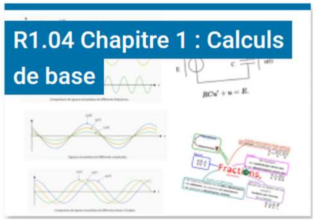


4) Faites défiler et choisissez la tuile « R1/R2 – 04 FTP - Outils Mathématiques et Logiciels 2023-2024 »

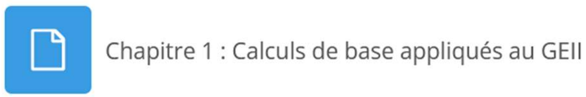
5) Cliquez sur la tuile « Travail à faire » :

Vous y trouverez chaque semaine le travail (avec les liens correspondants) à rendre pour la semaine suivante (DM, TP, QCM)

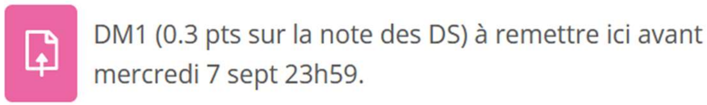
6) Cliquez sur la tuile du chapitre 1 :



Vous y trouverez différentes icônes : les dates indiquées ici sont des exemples.

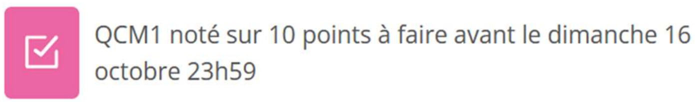


Il s'agit d'un fichier pdf à consulter.



Il s'agit d'un travail à rendre en format pdf

N'oubliez pas de valider la remise (scroller jusqu'à la fin de la page de remise)



Il s'agit d'un QCM à résoudre.

Il s'agit d'un dossier contenant plusieurs documents (vidéos, pdf).

Partie A : Calculs de base à connaître par cœur et à maîtriser

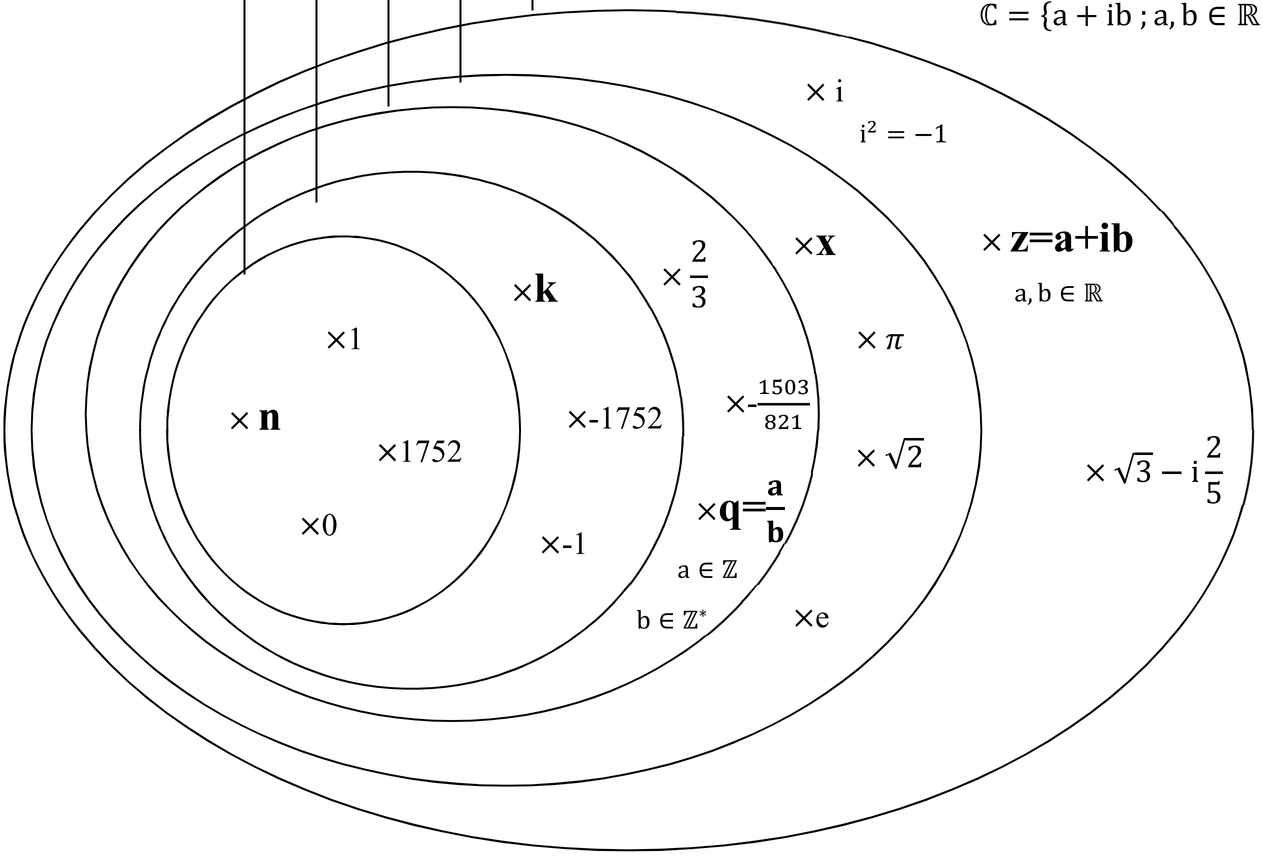
Ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ \dots;n\,;\dots\}$

Ensemble des nombres <u>entiers relatifs</u> :
$\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\dots;\mathrm{k}\,;\dots\}$

Ensembles des nombres <u>rationnels</u> : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\,;\mathrm{a} \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{b} \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres <u>réels</u> : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\,;\ \mathrm{e}\,;\ \pi\,;\dots;\mathrm{x}\,;\dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres <u>complexes</u> :
$\mathbb{C} = \{\mathrm{a}+\mathrm{ib}\,;\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{i}^2 = -1\}$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Ensemble des entiers naturels pairs : $\{0\,;2\,;4\,;6\,;\dots;2\mathrm{n} \text{ où } \mathrm{n} \in \mathbb{N}\,;\dots\}$

Ensemble des entiers naturels impairs : $\{1\,;3\,;5\,;7\,;\dots;2\mathrm{n}+1 \text{ où } \mathrm{n} \in \mathbb{N}\,;\dots\}$

Ensemble des entiers relatifs pairs : $\{\dots;\ -6\,;-4\,;\ -2\,;\ 0\,;2\,;4\,;6\,;\dots;2\mathrm{k} \text{ où } \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\,;\dots\}$

Ensemble des entiers relatifs impairs : $\{\dots;\ -5\,;-3\,;\ -1\,;\ 1\,;3\,;5\,;7\,;\dots;2\mathrm{k}+1 \text{ où } \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\,;\dots\}$

$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}} = a^n$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $a \neq 0$	$a^0 = 1$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$	$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $b \neq 0$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $b \neq 0$ et $d \neq 0$	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ $b \neq 0$ et $a \neq 0$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$ $b \neq 0$ et $d \neq 0$	$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$ $b \neq 0$, $c \neq 0$	$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ $a \neq 0$	$ax + b \leq 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b}{a} \text{ si } a > 0 \\ x \geq -\frac{b}{a} \text{ si } a < 0 \end{cases}$
Soit $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	Soit $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x}\sqrt{x} = x$	Soit $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$	Soit $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$
$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases} = \lvert a \rvert$	Soit a>0, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$	$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x}.\sqrt{y} + y$ $x \geq 0$, $y \geq 0$	$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}.\sqrt{y} + y$ Si $x \geq 0$, $y \geq 0$
$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$ $x \geq 0$, $y \geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq y$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $a \geq 0$, b>0
Soit x, un nombre positif et n un entier naturel non nul, la racine n[ième] de x, notée $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est le nombre réel positif y tel que $y^n = x$			
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$	$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$ $\xrightarrow{\text{on factorise}}$ $\xleftarrow{\text{on développe}}$ ($i^2 = -1$)
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$		$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$	

Factorisation et signe de P(x) = $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: on résout P(x) = 0. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, *P possède deux racines réelles* : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est la factorisation de P. "P(x) est du signe de -a entre les racines ".

- Si $\Delta = 0$, P possède une racine réelle double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$, alors $P(x) = a(x - x_1)^2$ est la factorisation de P. P(x) est du signe de a.

- Si $\Delta < 0$, *P possède deux racines complexes conjuguées* : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, alors $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$. P est du signe de a.

Remarque : Soit P(x) = $x^2 - s.x + p$. x_1 et x_2, les racines de P vérifient alors le système suivant : $\begin{cases} s = x_1 + x_2 \\ p = x_1 \times x_2 \end{cases}$

Factoriel d'un entier naturel Soit n, un entier naturel non nul, on appelle factoriel de n et on note n!, le produit des n premiers entiers naturels : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ Par convention 0! = 1.
Exemple : 1! = 1 ; 2! = 2 ; 3! = 6 ; 4!=24 ; 5! = 120 etc...
On remarque que 4! = 4 × 3! ou encore que 5! = 5 × 4! , plus généralement : $n! = n \times (n-1)!$

Proportionnalité Deux grandeurs X et Y non nulles sont proportionnelles, lorsqu'il existe un réel k non nul tel que :

Valeurs de X	**Valeurs de Y**
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

$\times$ k

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = k.x_1 \\ y_2 = k.x_2 \\ \quad \dots \\ y_n = k.x_n \end{array}\right\} \text{ se note aussi } \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}\ y_i = k.x_i$$

On a donc aussi : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k$

Ou encore : $x_1 y_2 = x_2 y_1$ etc...

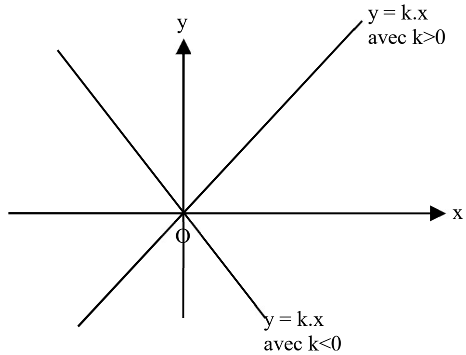
En pratique, sachant que X et Y sont deux grandeurs proportionnelles, ne connaissant pas k, le coefficient de proportionnalité,

On obtient x en résolvant l'équation :

$$x_1 y = x y_1 \Leftrightarrow x = \frac{x_1 y}{y_1}$$

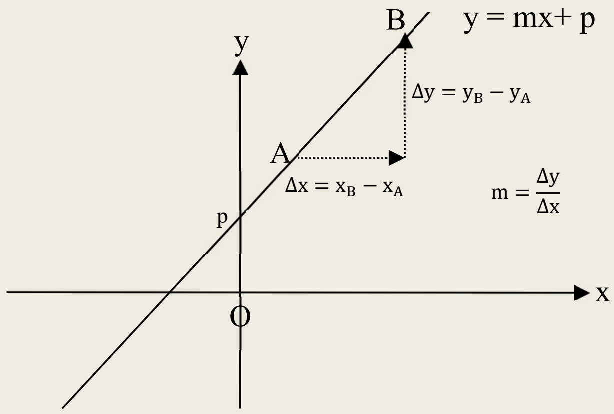
Valeurs de X	**Valeurs de Y**
x_1	y_1
x inconnu	y connu
...	...

$\times$?



La fonction f, définie par : f(x) = k.x est appelée **fonction linéaire**. Sa représentation graphique est la droite passant par O, l'origine du repère et ayant pour coefficient directeur (pente) k.

Equation (réduite) de la droite (AB) y = m.x + p où m est le coefficient directeur (la pente) de (AB) et p est l'ordonnée à l'origine.



Calcul de la pente m :
Si on connaît les coordonnées de A et B : m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$(A$\neq$ B)
Calcul de l'ordonnée à l'origine p :
Si on connaît le point Q, intersection de (AB) et de l'axe des ordonnées, on en déduit facilement $p = y_Q$,
Si non, on résout l'équation : $y_A = m.x_A + p$ (en effet, A$\in$ (AB)), et on obtient : $p = y_A - m.x_A$

Remarques : - Δy et Δx sont proportionnels, puisque $\Delta y = m.\Delta x$
- La fonction f, définie par : f(x) = m.x +p est appelée **fonction affine**. Sa représentation graphique est la droite passant par le point (0 ; p), et ayant pour coefficient directeur (pente) m.

Implication et équivalence par l'exemple

Implication : $x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9$, mais la réciproque est fausse : $x = 3 \not\Leftarrow x^2 = 9$
Equivalence : $x = 3$ ou $-3 \Longrightarrow x^2 = 9$, et la réciproque est vraie : $x = 3$ ou $-3 \Leftarrow x^2 = 9$.
On écrit alors : $x = 3$ ou $-3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ ou encore : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou -3 qui est une équivalence.

Le système métrique

× 10

Longueur	kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
	km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^{2}	10^{3}

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm ; 1 mm = 10^{-3} m

× 100

Surface	kilomètre carré	hectomètre carré	décamètre carré	mètre carré	décimètre carré	centimètre carré	millimètre carré
	km²	**hm²**	**dam²**	**m²**	**dm²**	**cm²**	**mm²**
	0,000001	0,0001	0,01	1	100	10000	1000000
	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1	10^{2}	10^{4}	10^{6}

1 m² = 100 dm² = 10000 cm² = 1000000 mm² ; 2 m² = 200 dm²

× 1000

Volume	kilomètre cube	hectomètre cube	décamètre cube	mètre cube	décimètre cube	centimètre cube	millimètre cube
	km³	**hm³**	**dam³**	**m³**	**dm³**	**cm³**	**mm³**
	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}

1 m³ = 1000 dm³ = 1000000 cm³ = 1000000000 mm³ ; 5 mm³ = 5.10^{-3} m³ ; 1 l = 1dm³

Préfixes multiples et sous-multiples de 1000

E exa	P peta	T téra	G giga	M méga	k kilo		m milli	µ micro	n nano	p pico	f femto
10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
						unité					

Unités de base et unités dérivés du SI (Système international)

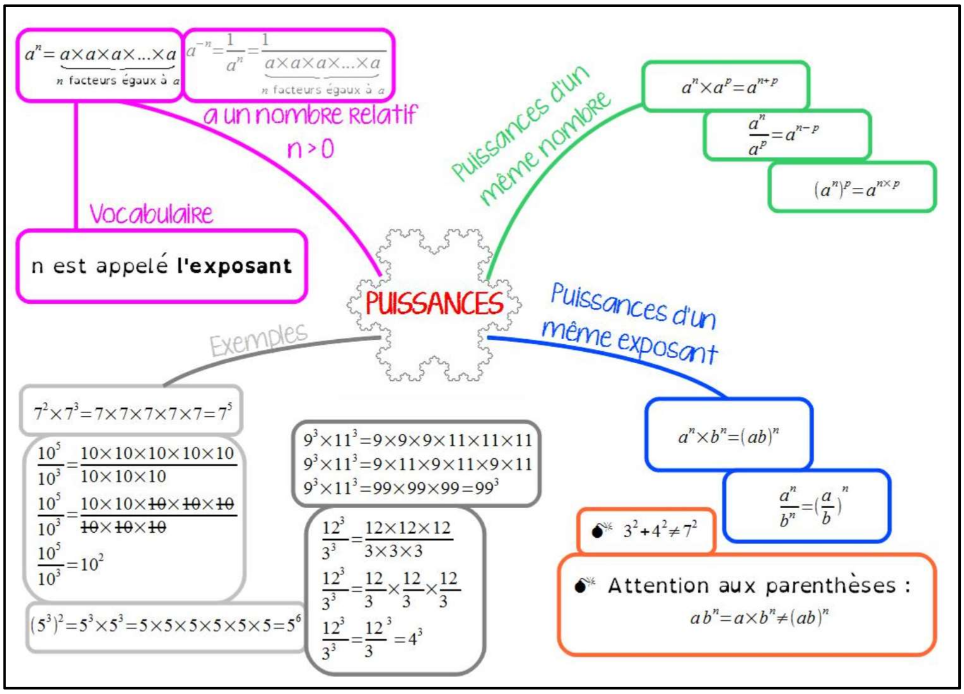
Le système international (SI) définit toutes les unités à partir de sept unités de base : Le mètre **m** (unité de longueur), le kilogramme **kg** (unité de masse), la seconde **s** (unité de temps), l'Ampère **A** (unité de courant électrique), le Kelvin K (unité de température), la molle **mol** (unité de quantité de matière), la candela **cd** (unité d'intensité lumineuse).

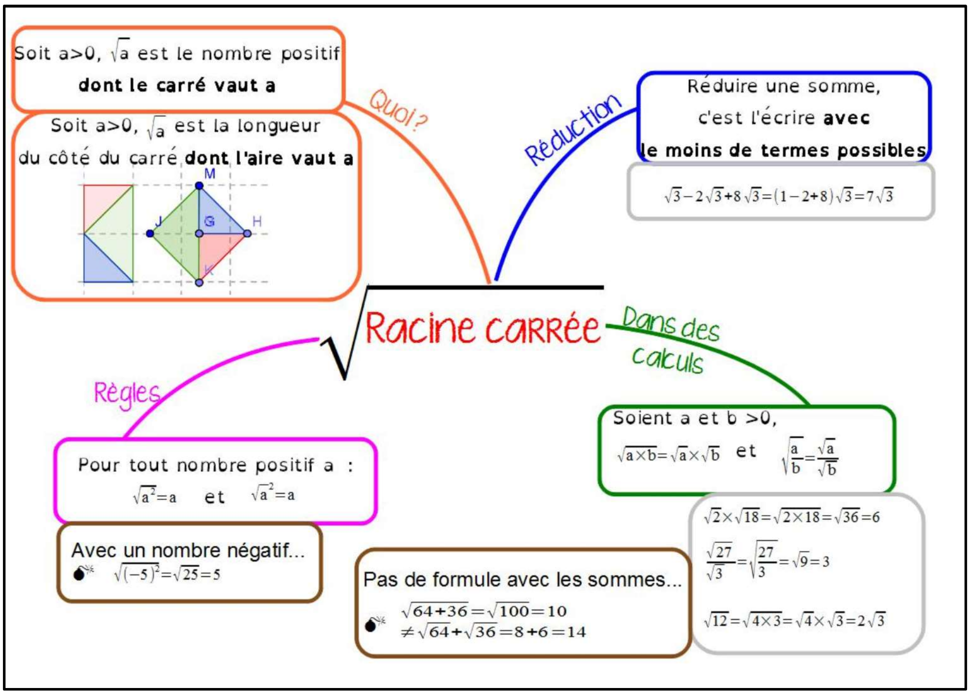
Toutes les autres unités sont dérivées de ces sept unités de base. Elles s'obtiennent en les multipliant ou en les divisant les unes par les autres, en suivant les formules de physique associées.
exples Le **kilowatt-heure** (noté kWh ou kW.h) utilisé pour mesurer la consommation d'électricité est le produit d'une puissance et d'un temps. L'**ampère heure** (noté Ah ou A.h) est le produit de deux unités : l'Ampère et l'heure.
Le **kilomètre par heure** (noté km/h ou km.h^{-1}) ou le **mètre par seconde** (noté m/s ou m.s^{-1}) sont utilisés pour mesurer la vitesse (dont la formule est : $\frac{distance}{temps}$). Ainsi 36 km/h = 36.1000 m / 3600 s soit : 36 km/h = 10 m/s . L'accélération qui est la variation de la vitesse, s'exprime en « (mètres par seconde) par seconde », soit en (m/s)/s = m/s² « **mètre par seconde au carré** ».

Certaines grandeurs bien que dérivées des unités de base auront un nom particulier.
Exples La quantité d'électricité est donnée en ampère heure (A.h), si le temps est compté en heure. Mais on exprime aussi la quantité d'électricité en Coulomb (C), produit de l'intensité en A par le temps en s : 1 C = 1 A.s.

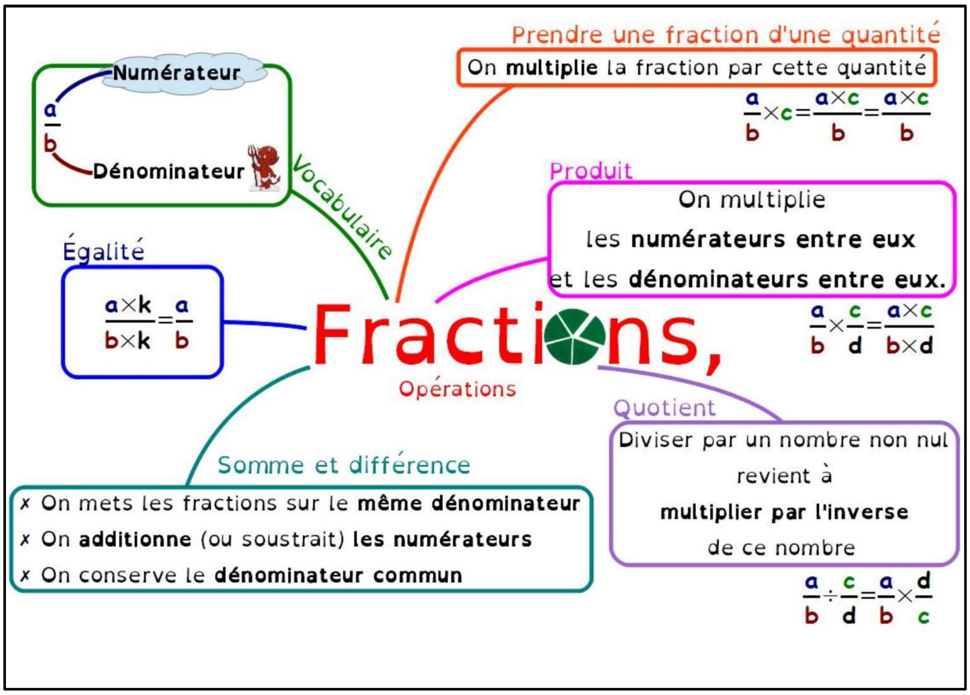
Les unités de mesure - http://www.metrologie-francaise.fr/fr/si/unites-mesure.asp
Bureau International des Poids et Mesures - http://www.bipm.org/fr/measurement-units/

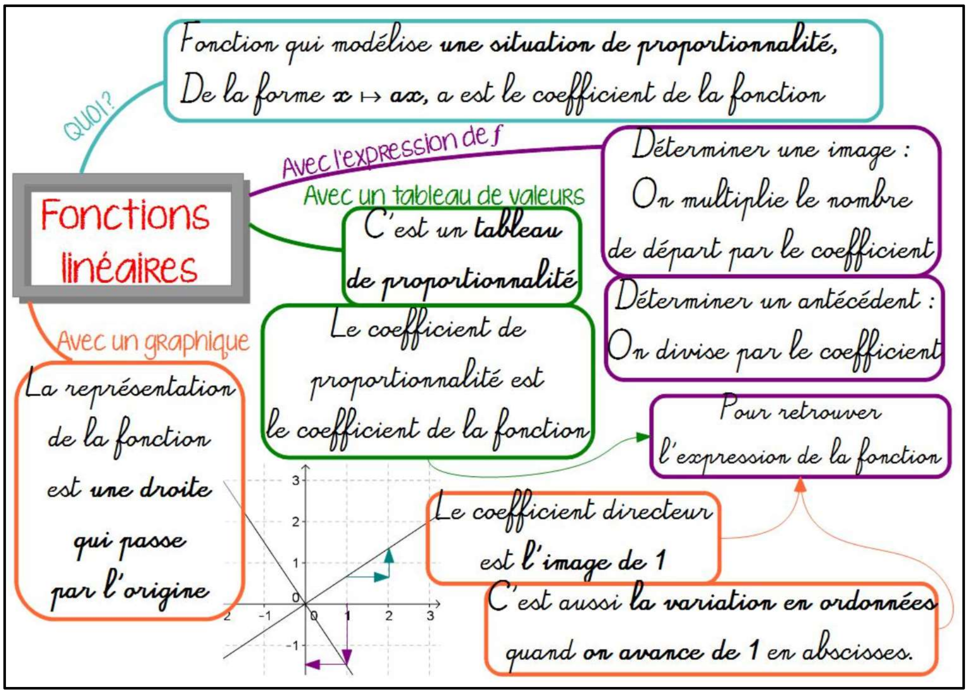
Travailler avec les cartes mentales



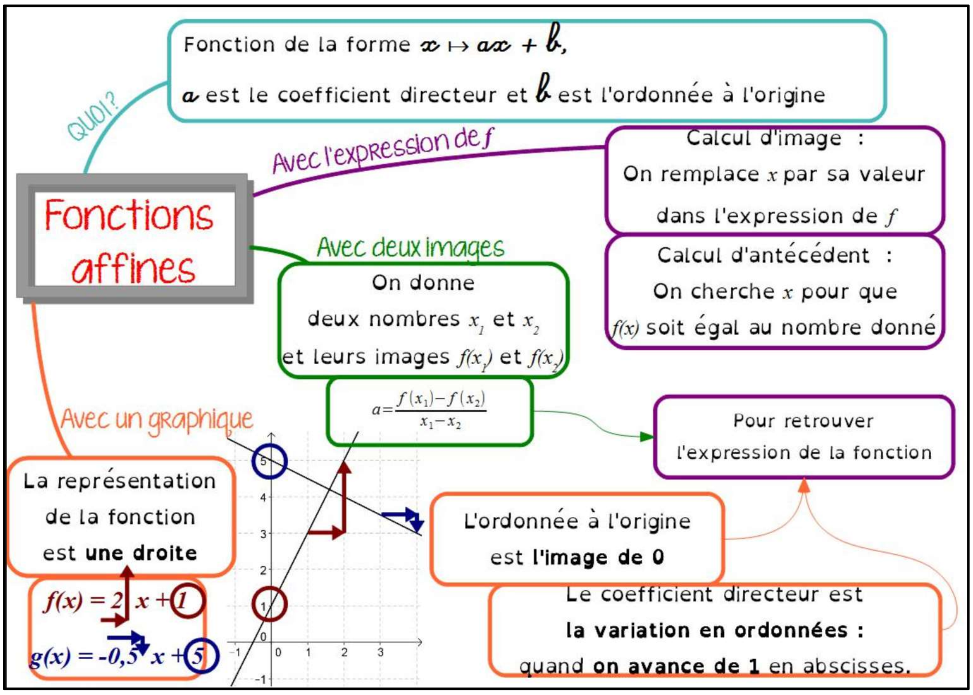


Source : http://autonom-maths.eklablog.com





Source : http://autonom-maths.eklablog.com



Source : http://autonom-maths.eklablog.com

A vous de créer vos cartes mentales…

Exercices d'application au GEII

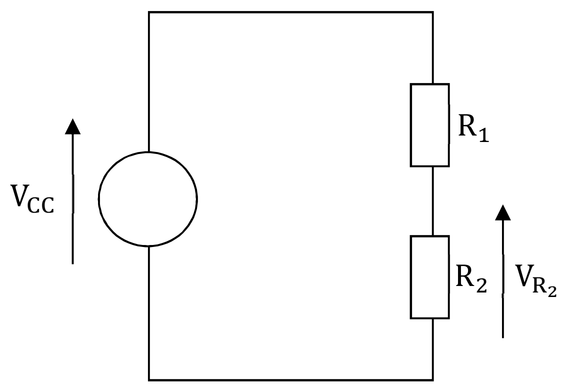
Exercice 1 Compléter sans utiliser de calculatrice :

1) (100+5).2 = 2) 100+5.2 = 3) 13+7.2 - 5 = 4) (13+7).(2 - 5) = 5) 8.4+3.2 = 6) 8.(4+3).2 =	7) (5x+6).(3x+2) = 8) 5x+6.(3x+2) = 9) 2 – (2R+5) = 10) $3y+x.(y^2 - 2y) =$ 11) $3y+xy^2 - 2y =$

Exercice 2 Deux résistances sont associées en parallèle, alors, on obtient la relation suivante, où R_e est la résistance équivalente : $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
Montrer que R_e est égale au quotient du produit des deux résistances par leur somme.

Exercice 3 Pont diviseur de tension

Soit V_{CC}, la tension aux bornes du générateur, et V_{R_2}, la tension aux bornes de la résistance R_2. On obtient alors la relation suivante : $V_{R_2} = V_{CC}.\frac{R_2}{R_2+R_1}$.



1) Exprimer V_{CC} en fonction de R_1, R_2 et V_{R_2}.
2) On souhaite obtenir V_{R_2} = 2 V. Quelle valeur donner à R_2, sachant que R_1 = 1 kΩ et V_{CC} = 5 V ? Etablir d'abord l'expression littérale puis faire l'application numérique.

Exercice 4 Petits problèmes

1) Une éolienne produit 1500 kWh en 2h30. Combien produirait-elle d'énergie en 24h si la vitesse moyenne du vent reste identique ?

2) Un câble de 1,5 mm² de section a une résistance de 5 Ohm. Quelle serait cette résistance si la section avait été de 2,5 mm² ?

3) Le chef de chantier avait prévu d'employer 10 électriciens pour effectuer une vaste installation en 30 jours ouvrables (6 semaines de 5 jours). Les travaux qui précèdent l'installation électrique ont mis une semaine de plus que le temps prévu. Combien d'ouvriers faudrait-il employer sur ce chantier, pour le réaliser en 5 semaines au lieu de 6 ?

Exercice 5 Convertisseur Température / Tension.

Une interface convertit la température T en °C en tension U en Volt. La gamme de températures en entrée est (10°C - 40°C) et la gamme de tensions en sortie est (0 V - 10 V). (A 10°C on obtient 0 V en sortie, et à 40°C on obtient 10 V en sortie)
1) Si la température en entrée est de 25°C, quelle est la tension de sortie ?
2) Si la tension de sortie est de 3V, quelle est la température à l'entrée ?
3) Soit T, la température à l'entrée et U, la tension de sortie, exprimer U en fonction de T, puis représenter les variations de U en fonction de T.
4) En déduire l'expression de T en fonction de U.

Exercice 6 Résistances équivalentes

Soit r, une résistance (strictement positive) telle que : $r = 10\Omega$.

1) Déterminer la résistance positive x telle que : $r + \frac{rx}{r+x} = x$
2) Déterminer la résistance positive x telle que : $r + \frac{rx}{r+x} \geq x$.
3) Reprendre les questions 1 et 3 pour une résistance positive r quelconque.

Exercice 7 Télémètre laser

Un télémètre laser est un appareil permettant de mesurer les distances. Il fonctionne de la façon suivante : un rayon laser est projeté sur une cible qui renvoie à son tour le rayon lumineux. Le temps mis par le rayon pour revenir est mesuré et la distance séparant l'utilisateur de la cible est calculée.
On suppose que la vitesse de l'onde (rayon lumineux) est de 340 m/s

1) De combien se déplace l'onde en $1\mu s$?
2) Combien de temps l'onde met pour parcourir 1 cm ?
3) Convertir la vitesse de l'onde en $cm/\mu s$.

Exercice 8 Corriger les copies ci-dessous en précisant, si possible, la(les) formule(s) mathématique(s) mise(s) en cause :

1)

$$J = 2\pi + \frac{2}{3} = \cancel{\frac{4\pi}{3}}$$ oH!

2)

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-2)(x+3)} = \frac{x-1}{(x-2)(x+3)}$$

3)

Calcul de base : fractions

$$\frac{2}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}} = \frac{2}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

4)

$(2x^3-1)^2 \times (x-1)$

$= (2x^6 - 2 \times 2x^3 + 1)(x-1)$

$= (2x^6 - 4x^3 + 1)(x-1)$

$= 2x^7 - 4x^3 + x - 2x^6 - 4x^3 - 1$

$= 2x^7 - 2x^6 - 8x^3 - 1$

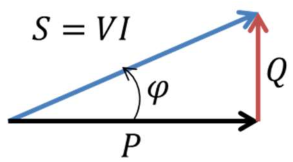
5)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^7}{7x^7}$ = OH!

6)

$$\frac{(R + L\omega)\frac{1}{C\omega}}{R + L + \frac{1}{C\omega}} = \cancel{\frac{R + L\omega}{RC\omega + LC\omega^2}}$$

7) En électricité



Q²=S²+P²

8)

- 3 cm²=0.09 m²
- 30 cm = 0,03 m
- 3 cm²=3⁴ m²
- 1.6*10⁻⁴+8*10⁻⁵=1.4*10⁻⁴
- 0.17*16=11.2
- 0,146≈0,14

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Notes

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Partie B : Trigonométrie : Définitions, propriétés et formulaire

Dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle **orienté de centre O et de rayon 1**. Sur ce cercle, on définit une **origine I** et deux sens : le **sens direct** (ou positif), est le **sens inverse des aiguilles d'une montre** ; et le sens indirect (ou négatif), est le sens des aiguilles d'une montre.

La longueur d'un cercle de rayon R est : $L = 2\pi R$, la longueur du cercle trigonométrique est donc 2π.

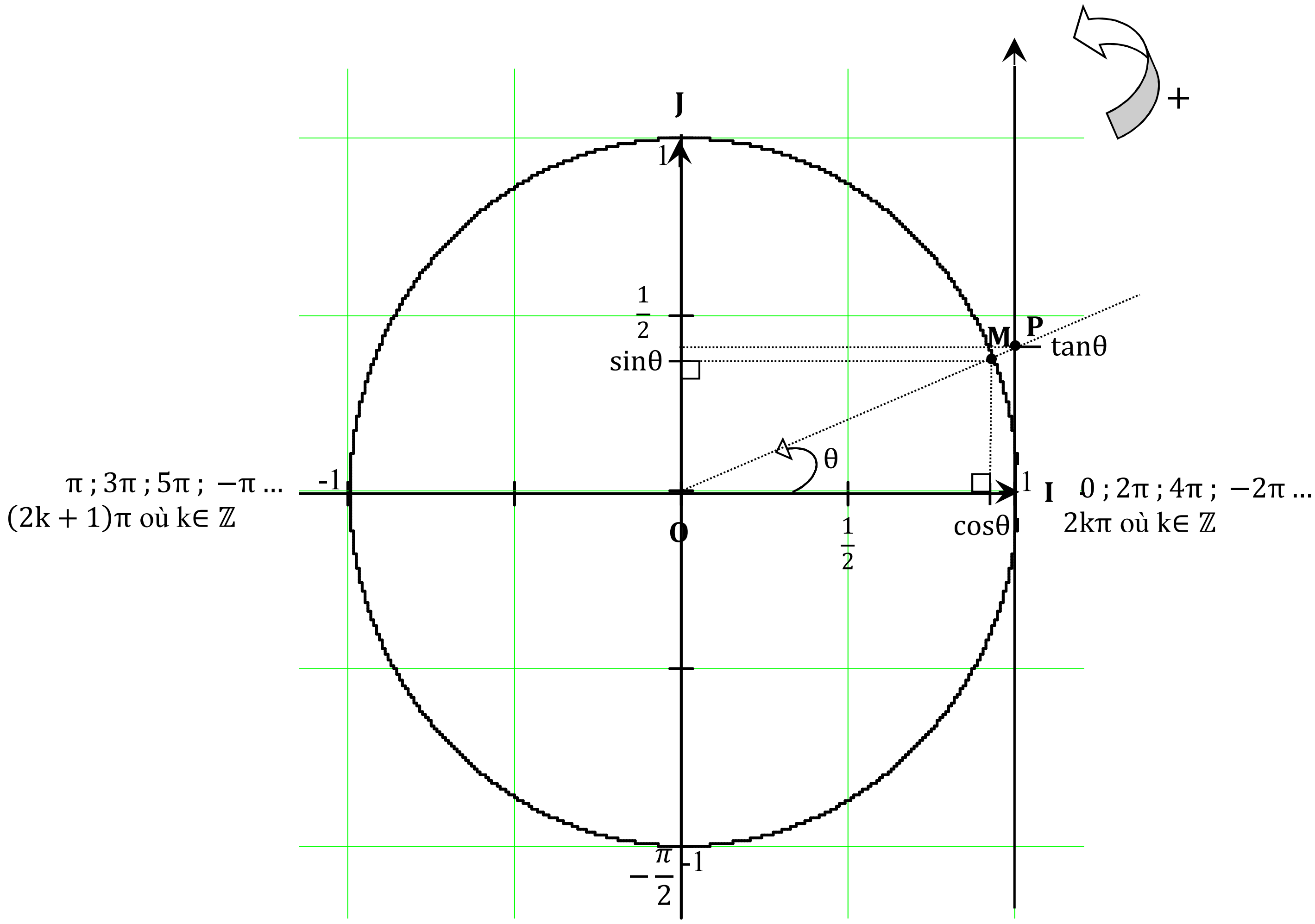
Soit M, un point sur le cercle trigonométrique. On note **θ une mesure en radians de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$
$\theta + 2k\pi$ **où** $k \in \mathbb{Z}$, sont donc aussi des mesures de ce dernier, on les appelle encore **θ modulo 2π**

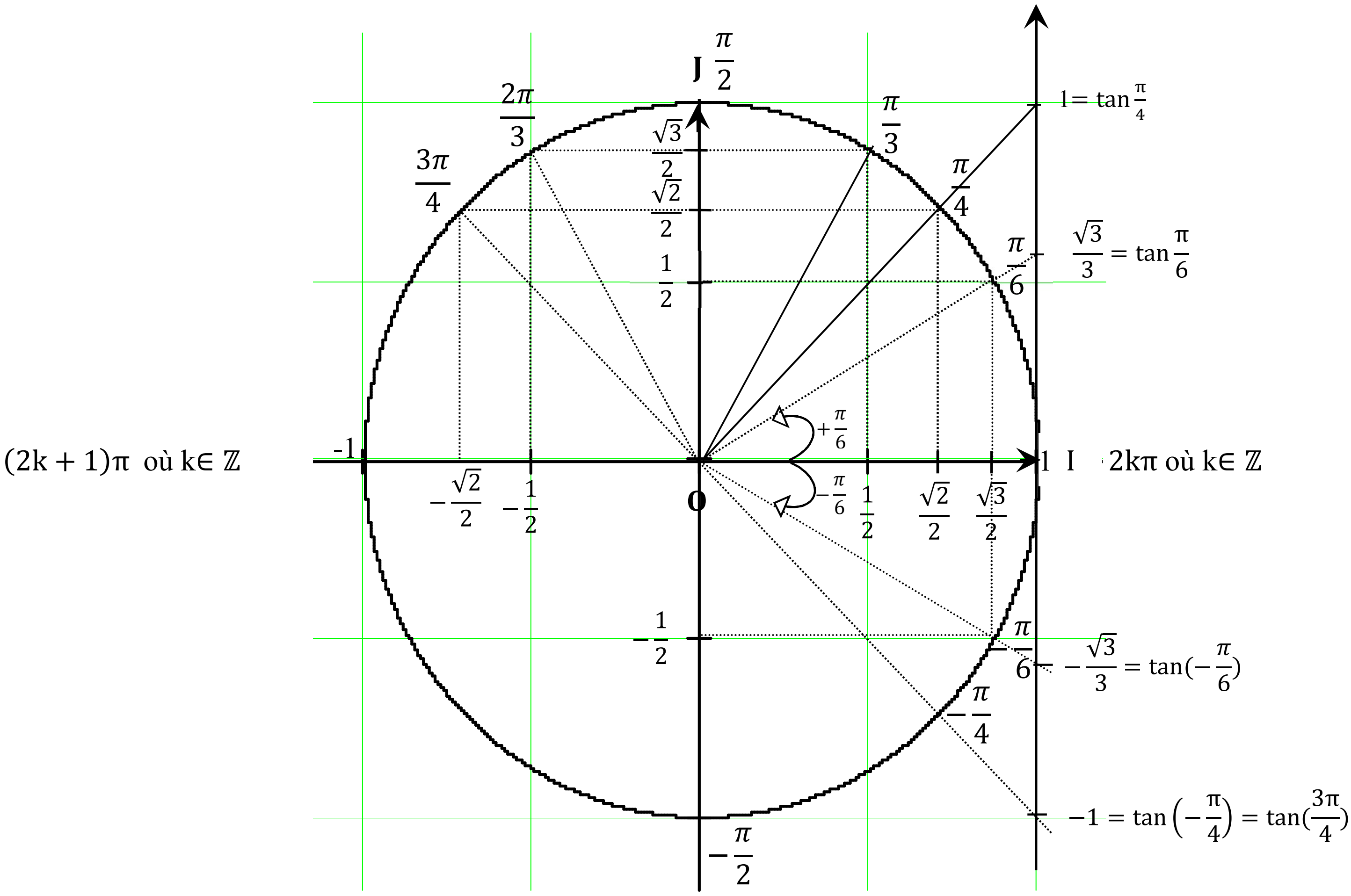
On appelle **mesure principale** de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ l'unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$

On appelle **cosinus** de l'angle orienté θ, **l'abscisse du point M** dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$
On appelle **sinus** de l'angle orienté θ, **l'ordonnée du point M** dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$
On obtient donc : $\overrightarrow{OM} = \cos\theta.\overrightarrow{OI} + \sin\theta.\overrightarrow{OJ}$

Soit Δ**, la droite parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point I**. Soit P, le point d'intersection des droites (OM) et Δ.
On appelle **tangente** de l'angle orienté θ, et on note $\tan(\theta)$, **l'ordonnée du point P** dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. On reportera cette dernière sur la droite Δ.

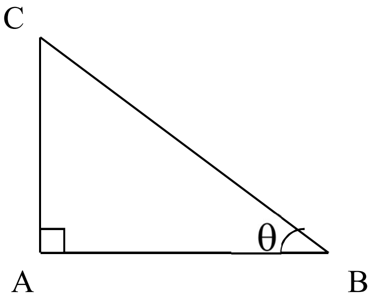
Remarque : $\frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} =$ **$\tan\theta$ est la pente de la droite (OM)** qui a donc pour équation : $y = x.\tan\theta$
Voilà pourquoi, le point P d'abscisse 1 et qui appartient à (OM) a pour ordonnée $\tan\theta$.





θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Impossible

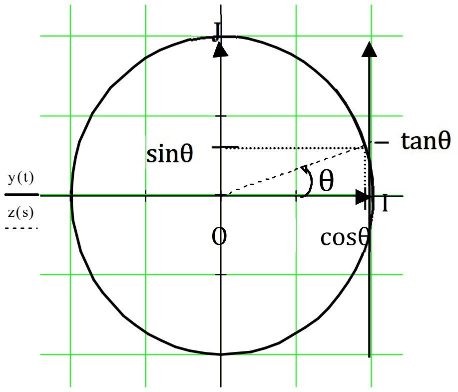
ABC est un triangle rectangle en A, et $\widehat{B}$ est aigüe.



$$\cos(\theta) = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$



$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$

$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ où $k\in\mathbb{Z}$

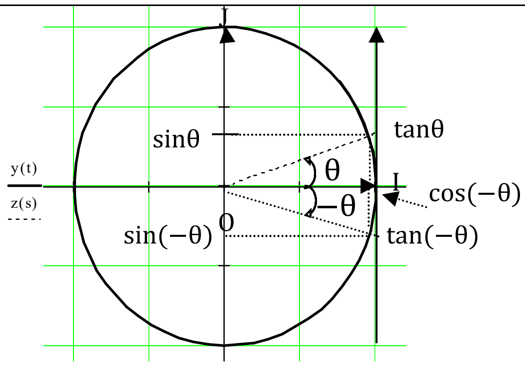
$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$

$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ où $k\in\mathbb{Z}$

$\tan(\theta + 2\pi) = \tan(\theta)$

$\tan(\theta + 2k\pi) = \tan\theta$ où $k\in\mathbb{Z}$

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques

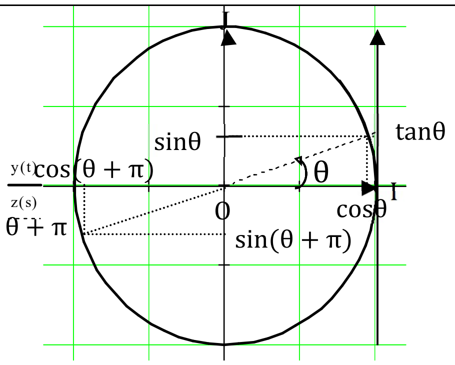


$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

La fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires



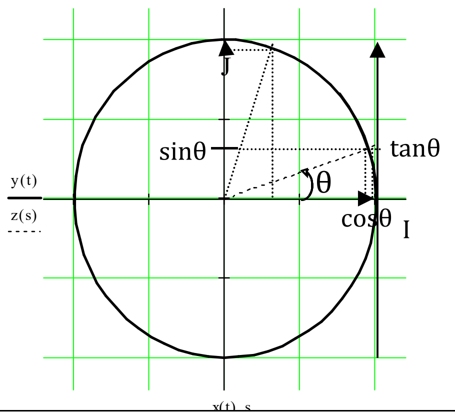
$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$

$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

$\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$

$\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$ où $k\in\mathbb{Z}$

La fonction tangente est π-périodique



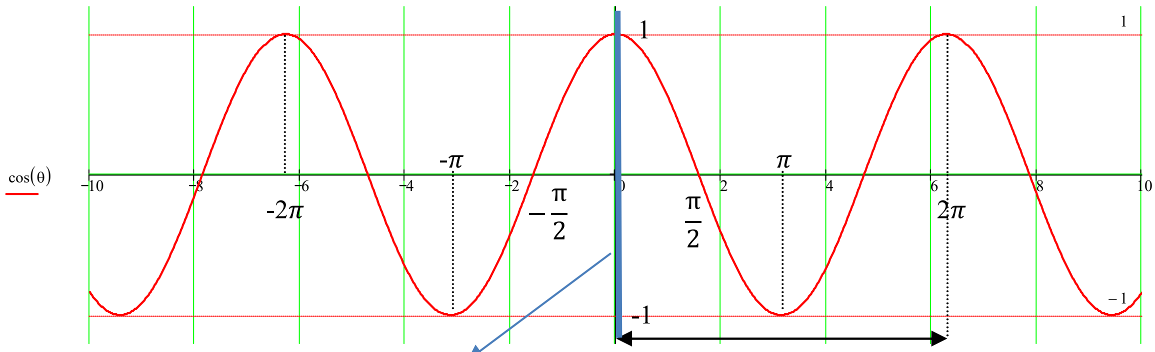
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Encadrement de cosinus et sinus : $\forall\, \theta \in \mathbb{R} \quad -1 \le \cos(\theta) \le 1$ et $-1 \le \sin(\theta) \le 1$

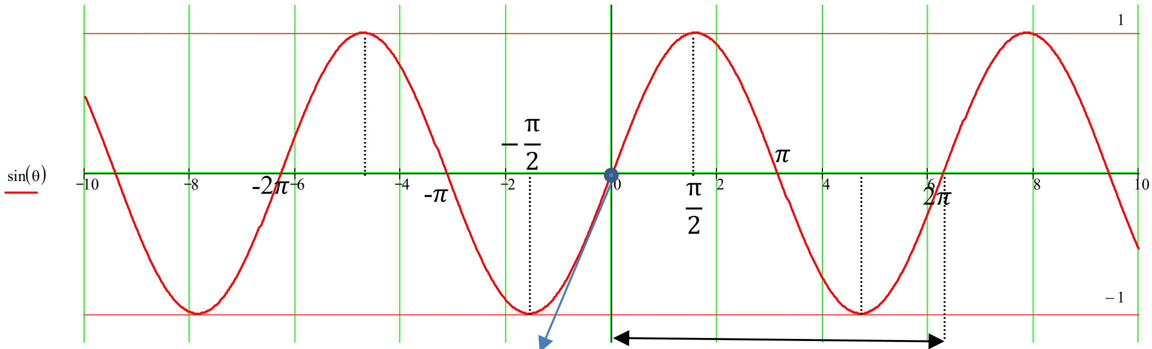
Représentation graphique des fonctions cosinus, sinus et tangente :



Cosinus est paire : sa courbe est symétrique par rapport à (Oy)

période : 2π

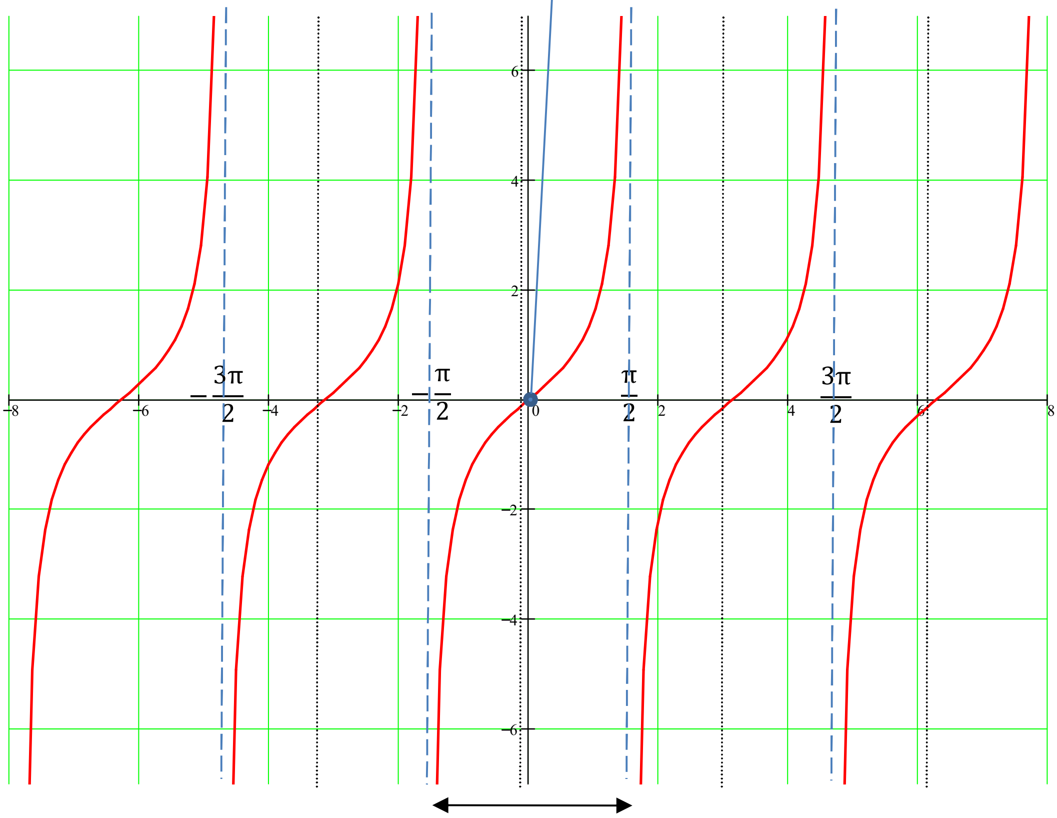
θ



Sinus et tangente sont impaires : leurs courbes sont donc symétriques par rapport à O

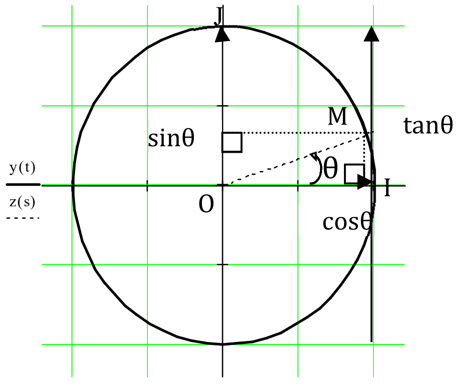
période : 2π

θ



période : π

Formulaire à connaître par cœur



$$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$1+\tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \quad \forall\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}$$

$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2.\cos a.\sin a$

Formules de linéarisation : (Transformation d'un produit en somme)

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1-\text{co}\ \ (2a)}{2}$$

$$\sin(a).\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2.\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Dérivées :

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \qquad (\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b) \qquad (\cos(U))' = -U'.\sin(u)$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b) \qquad (\sin(U))' = U'.\cos(u)$$

$$(\tan(x))' = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$$

$$(\tan(ax+b))' = a.\left(1+\tan^2(ax+b)\right) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)} \quad \forall\, ax+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$$

Primitives de sin(ax+b) : $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ + Cte ($a\neq 0$)

Primitives de U'.sin(U) : -cos(U) + Cte

Primitives de cos (ax+b) : $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ + Cte ($a\neq 0$)

Primitives de U'.cos (U) : sin(U) + Cte

Primitives de $\frac{1}{\cos^2(ax+b)} = 1+\tan^2(ax+b)$: $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$ + Cte ($a\neq 0$)

Primitives de $\frac{U'}{\cos^2(U)} = U'.\left(1+\tan^2(U)\right)$: tan(u) + Cte

Etude des signaux trigonométriques

$$\sin \quad : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \qquad \theta \longmapsto \sin\theta$$

$$\cos \quad : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \qquad \theta \longmapsto \cos\theta$$

$$\tan \quad : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k\epsilon\mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \theta \longmapsto \tan\theta$$

<u>Période, fréquence, pulsation, amplitude, déphasage</u>

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, et la fonction tangente est π-périodique
En effet, on a vu page 23 & 24 que : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$; $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ et $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
Les fonctions $t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$ et $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de <u>période</u> : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega \neq 0$
En effet, $\sin(\omega(t + T) + \varphi) = \sin(\omega t + \omega T + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = \sin(\omega t + \varphi)$

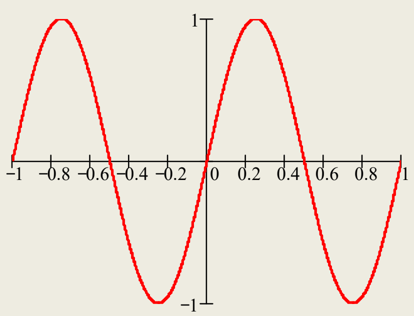
La fréquence f d'une fonction T-périodique est le nombre de motifs par unité de temps (si la variable t représente le temps). Donc $f = \frac{1}{T}$. Si T est en seconde, alors **f est en s^{-1} ou en Hertz (Hz).** Ainsi, $t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$ a pour fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$

On peut également exprimer le rythme d'une fonction périodique par la notion de **<u>pulsation</u>** (ou fréquence angulaire) ω, exprimé en **radians par seconde (rd/s)**

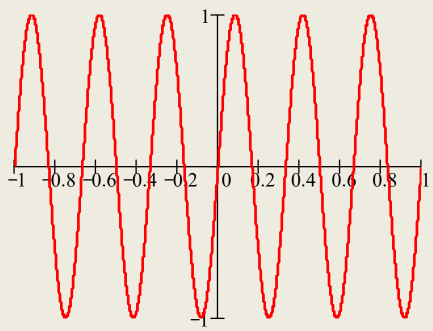
$t \longmapsto A.\sin(\omega t + \varphi)$ a pour <u>amplitude $|A|$</u>

$f_1 : t \longmapsto A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $f_2 : t \longmapsto A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ sont en déphasage de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
Si $\Delta\varphi > 0$ ($\Delta\varphi < 0$), on dit que f_2 est en avance (retard) de phase par rapport à f_1.
Les signaux **cosinus et sinus sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$**, en effet, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$.

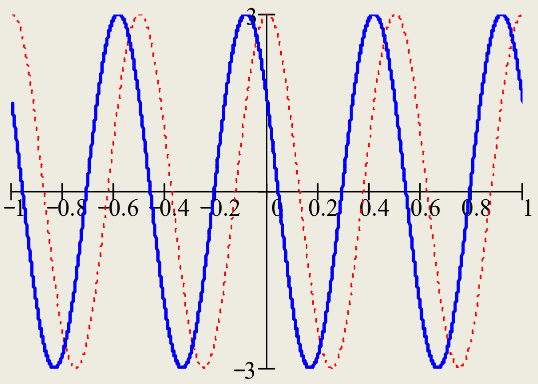
<u>Représentations graphiques de quelques signaux trigonométriques</u>



Fonction : $y = \sin(2\pi t)$
Période : T = 1 s
Fréquence : f = 1 Hz (1 motif sur 1 s)



Fonction : $y = \sin(6\pi t)$
Période : T = 1/3 s
Fréquence : f = 3 Hz (3 motifs sur 1s)



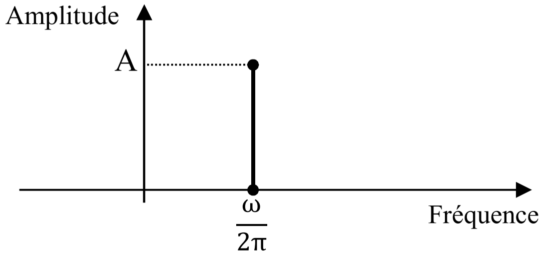
Fonction "trait pointillé" : $y = 3\cos(4\pi t)$
Fonction "trait continu " : $y = 3\cos(4\pi t + \frac{\pi}{3})$

Période des signaux : T = 1/2 s
Fréquence des signaux : f = 2 Hz (2 motifs sur 1 s)
Amplitude des signaux : 3 (unités en ordonnée)
Déphasage : $4\pi t + \frac{\pi}{3} - 4\pi t = \frac{\pi}{3}$ s

Spectre de signaux sinusoïdaux

Le **spectre** d'un signal est la **représentation des amplitudes** des différentes composantes présentes dans le signal **en fonction de la fréquence.**

Spectre du signal sinusoïdal $\mathbf{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$(et donc aussi du signal $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$)

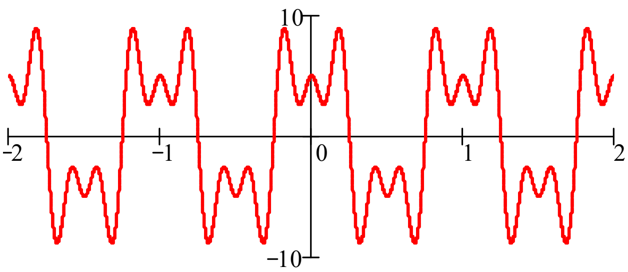


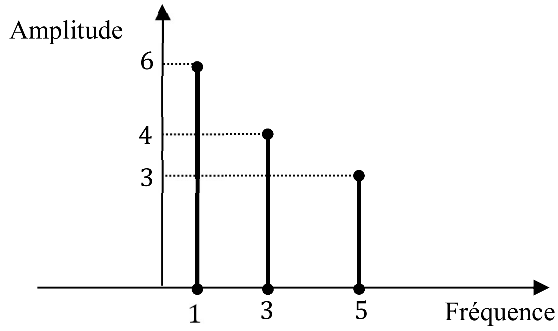
Le spectre d'une somme de sinusoïdes est la somme de leurs spectres.

Spectre du signal périodique $\mathbf{x(t) = 3\cos(10\pi t) + 6\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(6\pi t)}$

(Remarque : $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$)

Représentation temporelle





Valeur moyenne, valeur efficace d'un signal périodique

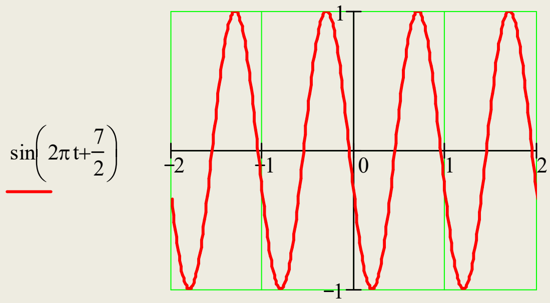
La **valeur moyenne** d'une fonction intégrable et T-périodique f, est la valeur donnée par : $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt$ où a est un nombre réel quelconque. La **valeur efficace** de f est la racine carré de la valeur moyenne de f^2 : $\sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(t)dt}$

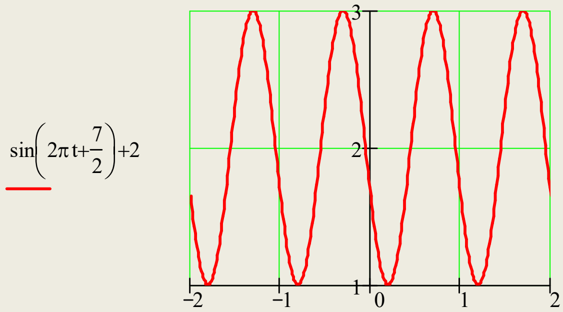
Rappel : Si F est une fonction primitive de f (c'est à dire : $F'(t) = f(t) \quad \forall t$), alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Valeur moyenne du sinus : $\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{T\omega}[-\cos(\omega t + \varphi)]_0^T = \frac{1}{T\omega}(-\cos(\omega T + \varphi) + \cos\varphi)$

Comme $\omega T = 2\pi$, et la fonction cosinus est 2π-périodique, alors $\cos(\omega T + \varphi) = \cos\varphi$ et :

la valeur moyenne de cosinus est donc nulle, on retrouve ce résultat graphiquement.





Soit m, la valeur moyenne du signal périodique f, alors m+k est la valeur moyenne du signal f+k où k est une constante .

Exercices d'application

<u>Exercice 1</u> Compléter le tableau suivant : (k est un entier relatif : $k \in \mathbb{Z}$)

θ	-2π ; 8π ; $2k\pi$	π ; $-\pi$; 7π ; -5π	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{27\pi}{4}$	$-\frac{47\pi}{6}$	$\frac{15\pi}{3}$	$\frac{28\pi}{6}$	$k\pi$
$\sin\theta$										
$\cos\theta$										
$\tan\theta$										

<u>Exercice 2</u> Résoudre les équations suivantes : (cela signifie qu'il faut trouver <u>toutes</u> les solutions de chacune de ces équations)

1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **2)** $\cos(2t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **3)** $\sin(3\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$

5) $\tan(x) = \sqrt{3}$

<u>Exercice 3</u> Compléter par lecture sur le cercle trigonométrique le bas de la page 24.

<u>Exercice 4</u> Compléter sans utiliser de formulaire de trigonométrie :

1) $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) =$ ....

Justification : ....

....

2) Définition de tan(θ) = ... $\theta \neq$ ……..

Alors : $1 + \tan^2(\theta) =$ .... $\theta \neq$ ……..

et : $1 + \tan^2(\theta) =$ .... $\theta \neq$ ……..

3) Rappeler les formules trigonométriques suivantes :

cos(a+b) =...

sin(a+b) =...

En <u>déduire</u> les formules suivantes :

cos(a-b) =...

cos(a-b) =……………………………………………………………………………….................

sin(a-b) =……………………………………………………………………………................

sin(a-b) =……………………………………………………………………………................

sin(2a) =………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..........

cos(2a) =…………………………………………………………………………. ....

…………………………………………………………………………………………..........

Exprimer cos(2a) en fonction de $\cos^2(a)$:

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………..........

…………………………………………………………………………………………..........

Exprimer cos(2a) en fonction de $\sin^2(a)$:

……………………………………………………………………………………...................

…………………………………………………………………………………………...........

……………………………………………………………………………………...................

…………………………………………………………………………………………...........

En <u>déduire</u> les formules de linéarisation de $\cos^2(a)$ et de $\sin^2(a)$ (traduction : transformer le produit $\cos^2(a)$ en somme, et faire de même avec $\sin^2(a)$)

………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………........

………………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes : (cela signifie qu'il faut trouver toutes les solutions de chacune de ces équations)

1) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = -1$

2) $4.\cos^2(x) + (2 - 2\sqrt{3}).\cos(x) - \sqrt{3} = 0$

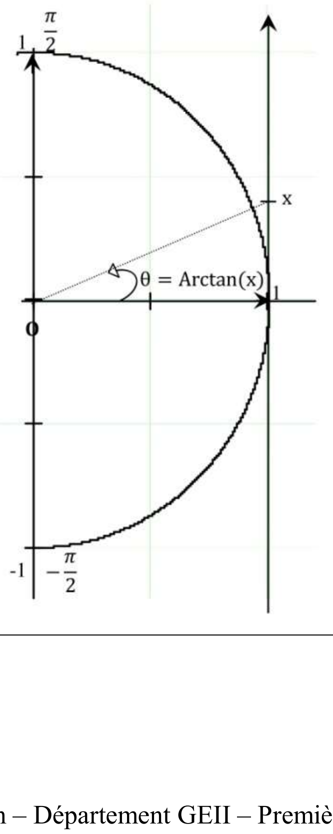
3) $\cos(2x) - 4\sin(x) + 3 = 0$

Exercice 6 Application de linéarisation (transformation d'un produit en somme)

1) Déterminer la valeur moyenne et la valeur efficace U_{eff} d'une tension sinusoïdale u définie par $u(t) = 3.\cos(2t + \frac{\pi}{5})$ (Voir définitions bas de la page 28).
2) Quelle est la valeur moyenne de la fonction f, définie par : $f(t) = 10 + 5\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$
3) Linéariser cos(x).cos(2x), puis en déduire la valeur de : $J = \int_0^{\pi} \cos(x) . \cos(2x)\, dx$

Exercice 7 **Arctangente**

Compléter le formulaire ci-dessous puis déterminer : Arctan(-1) ; Arctan(0) ; tan(Arctan189) ; $\mathrm{Arctan}(\tan(-\frac{2\pi}{3}))$; $\mathrm{Arctan}(\tan\frac{\pi}{20})$; $\forall\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\quad \mathrm{Arc}\tan(\tan(\theta))$



Soit x∈ ℝ, on appelle Arctangente de x et on note Arctan(x), l'unique angle $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ solution de l'équation : tan(θ) = x .

Arctan(1) = ... ; $\mathrm{Arctan}(\sqrt{3})$ = ... ; $\mathrm{Arctan}(-\sqrt{3})$= …

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \mathbf{\tan(Arctan(x)) = x}$

$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ \mathbf{Arctan(tan(\theta)) = \theta}$

tan(Arctan112)=….. ; $\mathrm{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \ldots..$

$\mathrm{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{-\pi}{16}\right)\right) = \cdots$

Notes

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Notes

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Partie C : Equation Différentielle Linéaire du premier ordre à Coefficients Constants - EDLCC

Les objectifs

1) Formule mathématique pour résoudre $\mathbf{a.y' + y = b}$ **où a$\neq$ 0, b sont des constantes et y la fonction inconnue à trouver.**
2) Exemples
3) Méthode de la tangente ou des 63% pour calculer la constante de temps τ

1) Formule mathématique : **a$\neq$ 0, b sont des constantes.**

Théorème : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre : $\mathbf{a.y' + y = b}$ **sont les fonctions y de la forme :** $\boldsymbol{y(t) = K.e^{-\frac{t}{a}} + b}$ **, où K est une constante**

Remarque voir démonstration au chapitre 9.

2) Exemples

✓ Résoudre l'EDLCC suivante : $\mathbf{3.y' + y = 5}$

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

✓ Résoudre l'EDLCC suivante : $\mathbf{3.y' + 2.y = 7}$ **avec y(0) = 0**

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

…………………………………………………………………………………………...............

✓ Résoudre l'EDLCC suivante : $\mathbf{y' - 5.y = 2}$ **avec y(0) = 1**

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

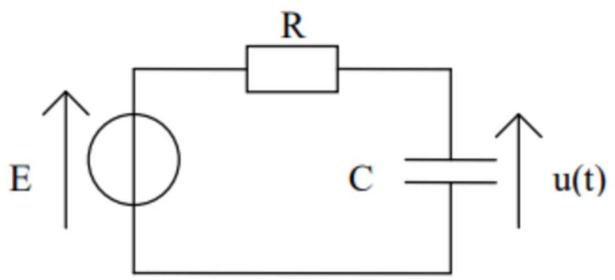
……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

3) <u>Méthode de la tangente et méthode des 63% pour calculer la constante de temps τ (se lit tau)</u>



$$RCu' + u = E.$$

Dans cette équation E, R et C sont des constantes strictement positives.

a) Résoudre l'EDLCC ci-dessus. On notera $\tau = \mathrm{RC}$.

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

b) Quelle est la solution qui vérifie u(0) = 0 ?

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

c) Construire le tableau de variation de la fonction précédente.

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

<u>Remarque</u> Régime permanent / Régime transitoire.

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

d) Déterminer l'équation de T_0 la tangente à la courbe représentant u (la solution précédente) en 0.
<u>Rappel</u> : $\mathbf{T_a : y = f(a) + (x - a).f'(a)}$

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………..........

e) <u>Méthode de la tangente</u> pour déterminer $\boldsymbol{\tau}$**,** la « constante de temps »

Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente T_0 et de l'asymptote à la courbe représentant u en l'infini :

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

…………………………………………………………………………………………...........

f) Méthode des 63% pour déterminer τ, la « constante de temps »

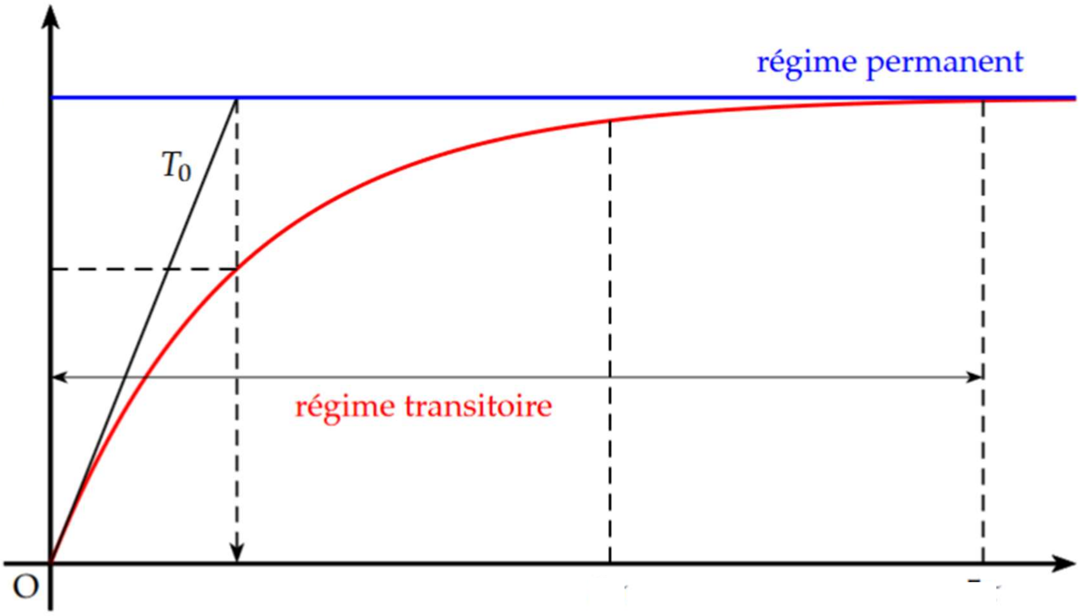
Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse τ sur la courbe représentant u.

……………………………………………………………………………………………..............

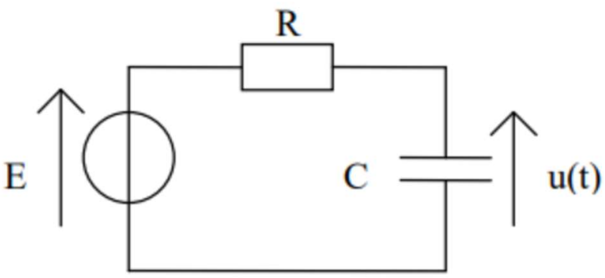
……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………………..............



Conclusion :



$$RCu' + u = E.$$

On note $\tau = RC$

Pour déterminer τ la constante de temps :
Ou bien on cherche l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe solution en 0, ou bien on cherche l'abscisse du point de la courbe solution dont l'ordonnée est 63% du régime permanent.

Notes

Partie D : Exercices d'entraînement pour les poursuites d'études longues

Exercice 1 La valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$ est : **1)** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ou bien **2)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$?

Exercice 2 a est un nombre réel quelconque et $E = \cos a - \sin a$. Quelle est la bonne réponse ?

1) $E = \cos(2a)$ **2)** $E = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ **3)** $E = \sin(2a)$

Exercice 3 Transformation d'une somme en produit et application et résolution d'équation

1) Simplifier cos(a+b)-cos(a-b), et en déduire la formule suivante :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2) Résoudre alors l'équation suivante : $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(\frac{3x}{2})$

Exercice 4

1) Ecrire autrement l'expression $A.\cos(\omega.t + \varphi)$

2) Soit $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)$, déterminer A>0 et φ tels que :
$f(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$.

3) Exprimer sous la forme précédente les fonctions suivantes, puis en déduire leur amplitude.
$f_1(t) = \cos(t) - \sin(t)$ et $f_2(t) = \cos(\omega t) + \sqrt{3}\sin(\omega t)$

Exercice 5 (pour le calcul intégral)

1) Exprimer en le démontrant, tan(a+b) en fonction de tan(a) et tan(b), en déduire la formule de tan(a-b), puis de tan(2a)

2) On pose $t = \tan(\frac{a}{2})$, en déduire les formules suivantes : $\begin{cases} \sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

Annales du concours d'entrée à l'ITII (école d'ingénieur par apprentissage)

Question 1 Calculer :

$$\boxed{\cos^6 x - \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^6 x =}$$

Exprimer $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$:

$\cos^2 a =$	$\sin^2 a =$

En déduire des réels a, b, c, d tels que l'égalité ci-dessous soit valable pour tout réel x :

$$\cos^6 x - \sin^6 x = a + b \cdot \cos 2x + c \cdot \cos 4x + d \cdot \cos 6x$$

$a =$ $\quad b =$ $\quad c =$ $\quad d =$

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) dx =$$

Minuscule	Majuscule	Se lit
α	A	alpha
β	B	bêta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	dzêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rhô
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
φ	Φ	phi
χ	X	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	Oméga