

OML2

Transformée de Laplace, TP2

Nicolas Boizot

March 21, 2024



Fonction de transfert

Instruction : `tf(Num,Den)`

Num et Den sont des vecteurs composés respectivement des coefficients du numérateur et du dénominateur.

Les coefficients de ces polynômes rangés par **ordre décroissant de la puissance des monômes correspondant**.

Ces informations sont disposées entre crochets et séparées par des espaces.

Exemple 1 :

$$F(s) = \frac{s + 2}{3s^2 + 4s + 5}$$

```
>> F=tf([1 2],[3 4 5])
```

```
F =
```

```
      s + 2
```

```
-----
```

```
3 s^2 + 4 s + 5
```

```
Continuous-time transfer function.
```

Exemple 2 :

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)(s + 2)}$$

```
>> F1 = tf([1 1 1],[1 1]); F2 = tf(1,[1 2]); F=F1*F2
```

```
F =
```

```
  s^2 + s + 1
```

```
-----
```

```
  s^2 + 3 s + 2
```

```
Continuous-time transfer function.
```

Possibilité de factoriser (instruction `zpk`) :

```
>> zpk(F)
```

```
ans =
```

```
(s^2 + s + 1)
```

```
-----
```

```
(s+2) (s+1)
```

```
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Exemple 3: système avec un retard

```
K=10; T=0.5; sys = tf(K,[T 1]); sys.InputDelay = 2
```

```
sys =
```

$$\exp(-2*s) * \frac{10}{0.5 s + 1}$$

```
Continuous-time transfer function.
```

Exercice

Vérifiez (dans le cours) comment un retard est exprimé dans le domaine de Laplace.

Exercice

Coder sous Matlab les fonctions de transferts suivantes:

- $F(s) = \frac{3(s+4)}{s^2+2s+1}$

- $F(s) = 10 \frac{s^2+2s+1}{(s+2)(s+3)}$

- $F(s) = \frac{s+1}{s+2} e^{-3s}$

- $F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$

Commande Isim

- TP2 - Réponse à une entrée quelconque (Fonction lsim)

Si on souhaite visualiser la réponse d'un système modélisé par une fonction de transfert F à une entrée quelconque, alors il convient:

- (cf. TP1) de définir le signal d'entrée. Pour cela :
 - on crée un vecteur \mathbf{t} (ou *Base de temps*) où l'on range tous les instants où le signal d'entrée va être défini,
 - puis on crée un vecteur \mathbf{u} , de même dimension que \mathbf{t} , où l'on range les valeurs de l'entrée à chacun de ces instants.
- puis on évalue la sortie du système à ce signal d'entrée au moyen de l'instruction lsim:
 $y = \text{lsim}(F, \mathbf{u}, \mathbf{t});$
- (cf. TP1) et il ne reste plus qu'à exécuter le tracé graphique.

Exemple :

On souhaite visualiser

- la réponse d'un système intégrateur pur ($\rightarrow F = \frac{1}{s}$)
- à une rampe de pente 2 ($\rightarrow u(t) = 2 * t$)
- appliquée depuis $t = 0$ s pendant 10 ($\rightarrow t$ ou base de temps).

```
t=0:0.1:10; % definition directe de la base de temps
u=2*t; % definition de la rampe d'entree
F=tf([1],[1 0]); % definition de la fonction de transfert
y=lsim(F,u,t); % simulation de la reponse
plot(t,y,'lineWidth',2) % trace graphique (couleur par default)
```

Exercice

Comme vous connaissez l'expression de l'intégrale de la rampe de pente 2, superposez le résultat du code à la dite intégrale sur le même graphe.

La **réponse impulsionnelle** d'un processus est le signal de sortie qui est obtenu lorsque l'entrée est une impulsion (de Dirac).

Exercice

Reprendre l'exemple précédent et simulez la réponse impulsionnelle.

La **réponse indicielle** d'un processus est le signal de sortie qui est obtenu lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude quelconque.

Unitaire : l'échelon est d'amplitude 1.

Exercice

Reprendre l'exemple précédent et simulez la réponse indicielle d'amplitude 3.

Exercice

Reprendre l'exemple précédent et simuler la réponse à une entrée sinusoïdale

- de fréquence 0.5 Hz;
- d'amplitude 2.

On supposera que les deux signaux sont dans la même unité physique, il y aura du sens à représenter signal d'entrée et signal de sortie dans le même graphe.

Systemes du premier ordre

$$F(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Forme canonique : on utilise ce terme pour nommer une façon d'écrire la fonction de transfert de sorte à ce que les coefficients *nous renseignent sur le comportement dynamique* du système qu'elle décrit.

$$F(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \quad \text{avec} \quad \tau > 0$$

- K - gain statique (ou coefficient multiplicateur statique)

- τ - constante de temps

- TP2 - Système du premier ordre

Graph → Réponse indicielle d'un système du premier ordre à un échelon d'amplitude \mathcal{A} :

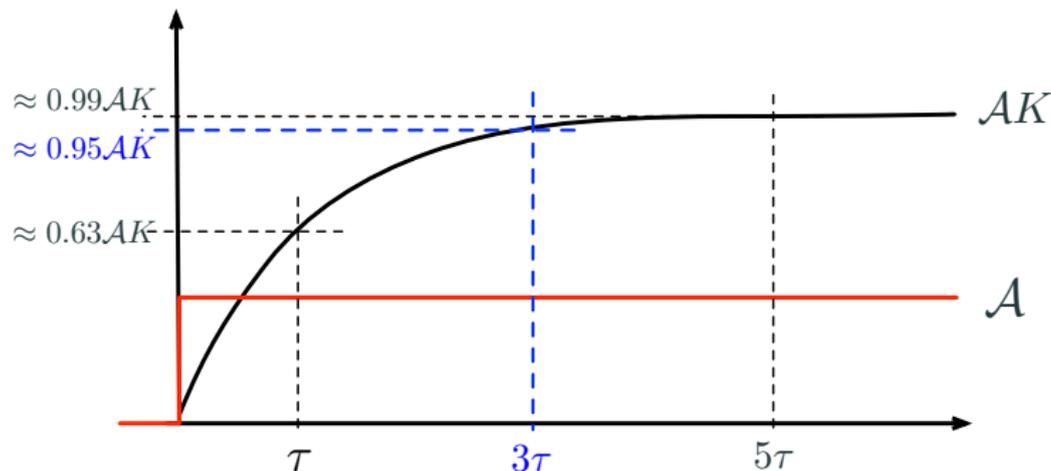


Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie:

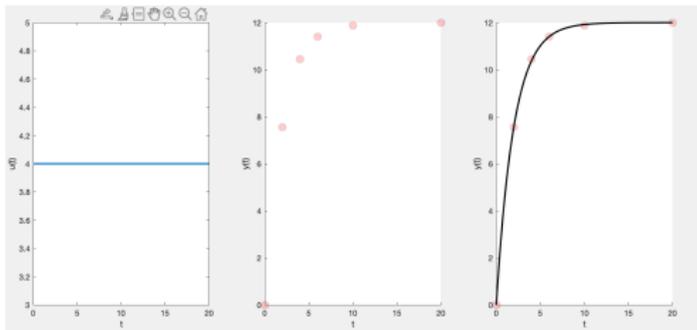
t	τ	2τ	3τ	5τ	∞
$\frac{y(t)}{\mathcal{A}K}$ (%)	63	87	95	99	100

Exercice

Simulez la réponse indicielle d'amplitude 4 d'un système du premier ordre défini par $K = 3$ et $\tau = 2$, on prendra $t \in [0, 20]$.

Le résultat sera présenté dans trois fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1** - graphe du le signal d'entrée;
- **Fenêtre 2** - points d'intérêts de la réponse aux temps 0 , τ , 2τ , 3τ , 5τ et 10τ (qui fera office de point à l'infini).
- **Fenêtre 3** - idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).



Systemes du second ordre

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1s}{a_1s^2 + a_1s + a_0}$$

Forme canonique :

$$F(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

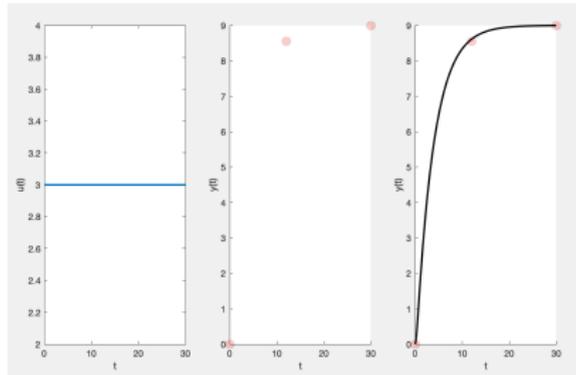
- K - gain statique (ou coefficient multiplicateur statique)
- ζ - Coefficient d'amortissement
- $\omega_0 > 0$ - est la pulsation propre non amortie du système

La forme de la réponse indicielle, c'est à dire le comportement du système, **dépend qualitativement de la valeur de ζ** .

- TP2 - Systèmes du second ordre

Régime apériodique : $\zeta > 1$

- En $t = 0$, la courbe admet une **tangente horizontale**.
- La courbe (monotone) ne dépasse pas son asymptote horizontale (\mathcal{AK}) où \mathcal{A} est l'amplitude du signal entrée.
- Il n'y a pas de formule pour déterminer le temps de réponse à 5%.
- Nous pouvons remarquer cependant que le système ressemble à un système du premier ordre lorsqu'on s'éloigne de $t = 0$.
- Le temps de réponse à 5% peut être approché par la valeur $t_r \approx 3 \times \frac{2\zeta}{\omega_0}$.



Exercice

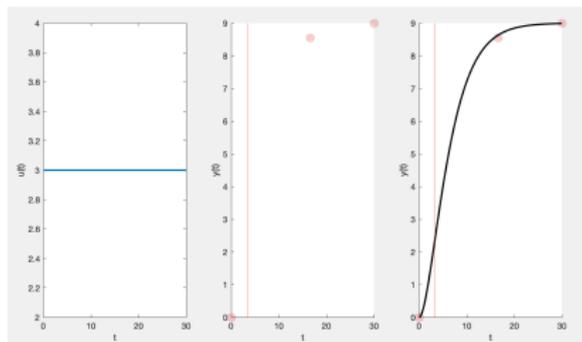
Simulez la réponse indicielle d'amplitude 3 d'un système du second ordre défini par $K = 3$ et $\zeta = 2$, $\omega_0 = 1$, on prendra $t \in [0, 30]$.

Le résultat sera présenté dans trois fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1** - graphe du le signal d'entrée;
- **Fenêtre 2** - points d'intérêts de la réponse aux temps 0, $6\frac{\zeta}{\omega_0}$, 30 (qui fera office de point à l'infini).
- **Fenêtre 3** - idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).

En faisant varier la valeur de $\zeta > 1$ vérifier dans quelle mesure l'approximation du temps de réponse à 5% est fiable.

- En $t = 0$, la courbe admet une **tangente horizontale**.
- La courbe (monotone) ne dépasse pas son asymptote horizontale (\mathcal{AK}) où \mathcal{A} est l'amplitude du signal entrée.
- Il n'y a pas de formule pour déterminer le temps de réponse à 5%.
- Le temps de réponse à 5% peut être approché par une valeur légèrement plus petite $t_r \approx \frac{5}{\omega_0}$.
- Abscisse du point d'inflexion : $\frac{1}{\omega_0}$.



Exercice

Simulez la réponse indicielle d'amplitude 3 d'un système du second ordre défini par $K = 3$ et $\zeta = 1$, $\omega_0 = 0.3$, on prendra $t \in [0, 30]$.

Le résultat sera présenté dans trois fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1** - graphe du le signal d'entrée;
- **Fenêtre 2** - points d'intérêts de la réponse aux temps 0, $5\frac{\zeta}{\omega_0}$, 30 (qui fera office de point à l'infini), verticale (commande *xline*) au point d'inflexion;
- **Fenêtre 3** - idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).

- TP2 - Systèmes du second ordre

Régime oscillatoire amorti : $\zeta < 1$

- En $t = 0$, la courbe admet une **tangente horizontale**.
- La courbe dépasse pas son asymptote horizontale (\mathcal{AK}) où \mathcal{A} est l'amplitude du signal entrée.
- $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ est la pseudo-période de la réponse oscillatoire amortie.
- $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ est la pulsation de la réponse oscillatoire amortie.
- Temps du premier dépassement : $\frac{T_p}{2}$
- Dépassement (en % de \mathcal{AK}) :

$$D_n = \exp\left(\frac{-n\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$$

- Référence souvent utilisée : $\zeta = 0.7$ correspond à $D_1 \approx 5\%$.

- TP2 - Systèmes du second ordre

Régime oscillatoire amorti : $\zeta < 1$

Exercice

Simulez la réponse indicielle d'amplitude 3 d'un système du second ordre défini par $K = 3$ et $\zeta = 0.3$, $\omega_0 = 0.3$, on prendra $t \in [0, 80]$.

Le résultat sera présenté dans deux fenêtres graphiques placées côte à côte.

- **Fenêtre 1** - points d'intérêts de la réponse aux temps 0 , $\frac{T_p}{2}$, T_p , $\frac{3T_p}{2}$ et 80 (qui fera office de point à l'infini).
- **Fenêtre 2** - idem fenêtre 2 ainsi que le graphique de la sortie $y(t)$ (obtenu avec la commande *lsim*).

Vérifiez que $D_1 \approx 5\%$ lorsque $\zeta = 0.7$.

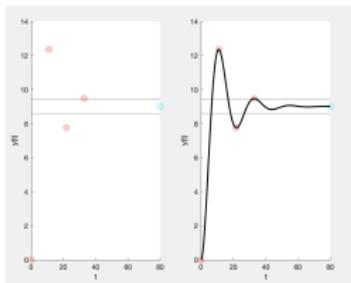


Diagramme de Bode

Le diagramme de bode est un outil graphique pour l'analyse fréquentielle de la fonction de transfert de notre système. Ce diagramme est composé de deux graphiques:

- un pour l'évolution de l'amplitude de la fonction de transfert en fonction de la fréquence du signal d'entrée.
- un pour l'évolution de la phase de la fonction de transfert en fonction de la fréquence du signal d'entrée.

Pour tracer ce diagramme on utilise la commande *Bode* (*Fonction de transfert*).

Syntaxe :

```
F = .. % fonction de transfert definie avec la commande tf
WMIN = .. % pulsation min (en rad/sec)
WMAX = .. % pulsation max (en rad/sec)
bode(F, {WMIN, WMAX})
```

Exemple :

```
clc, clear all, close all
% FILTRE 1
K = 1; % Coefficient d'amplification
tau = 0.5; % Constante de temps
F1 = tf([K],[tau,1]) % Filtre 1 (ordre 1)
% FILTRE 2
% on garde la meme valeur pour K
w_0 = 1; % rad/s
zeta = 0.6; % Coefficient d'amortissement
F2 = tf(w_0^2*K,[1,2*zeta*w_0,w_0^2]);
WMIN = 1/tau/100 % pulsation min = 100 fois moins que 1/tau
WMAX = 100/tau % pulsation max = 100 fois plus que 1/tau
hold on
bode(F1,{WMIN,WMAX},'r')
bode(F2,{WMIN,WMAX},'b')
hold off
legend('Ordre 1','Ordre 2')
```

Simulation d'un moteur CC

Exercice

- simuler une PWM
- passer la PWM par un filtre passe-bas \implies comparer la valeur asymptotique de la sortie à l'amplitude moyenne sur une période
- simuler le moteur CC en appliquant en entrée un échelon d'amplitude choisie
- simuler le moteur CC en appliquant en entrée une PWM équivalente
- comparer